

# Dificultades conceptuales para la comprensión de la ecuación de Bernoulli

Fernando Vega-Calderón<sup>1,a</sup>, Leticia Gallegos-Cázares<sup>2,b</sup>, Fernando Flores-Camacho<sup>2,c</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Física, Facultad de Ciencias, UNAM. Circuito Exterior s/n. Ciudad Universitaria. Código Postal 04510. México..

<sup>2</sup>Departamento de Cognición y Didáctica de las Ciencias, CCADET, UNAM. Circuito Exterior s/n. Ciudad Universitaria. Apartado Postal 70-186, Código Postal 04510. México.

<sup>a</sup>[inparadisum11@ciencias.unam.mx](mailto:inparadisum11@ciencias.unam.mx), <sup>b</sup>[leticia.gallegos@ccadet.unam.mx](mailto:leticia.gallegos@ccadet.unam.mx), <sup>c</sup>[fernando.flores@ccadet.unam.mx](mailto:fernando.flores@ccadet.unam.mx)

[Recibido en julio de 2016, aceptado en enero de 2017]

En este trabajo se presentan los resultados de una investigación sobre ideas previas de estudiantes del bachillerato acerca de algunos fenómenos que se explican, cualitativamente, mediante la ecuación de Bernoulli como aproximación. Para ello, a la muestra estudiada se le aplicó un cuestionario en el cual se plantearon cuatro casos concernientes a la Dinámica de Fluidos. Para evaluar las respuestas de los alumnos se construyó un criterio de evaluación, conformado por cinco categorías de clasificación, con el que se delimitaron las explicaciones dentro de las cuales se identificaron sus ideas previas. Se encontró que estas ideas intuitivas sobre la relación entre las variables presión estática y rapidez del flujo son contrarias a la expresada por la ecuación de Bernoulli.

**Palabras clave:** Ideas previas; ecuación de Bernoulli; investigación educativa; educación media superior; enseñanza de la Física.

## Conceptual difficulties in understanding the Bernoulli's equation

This paper showed the results of a previous ideas research into high school students about phenomena related with Bernoulli's equation. A questionnaire consisted of four cases based on fluid dynamics was applied to 54 students. To assess the student's responses, were build five categories of classification in which their previous ideas were identified. The results showed some of previous ideas and the relationship between static pressure and flux velocity are opposed to their meaning in Bernoulli equation.

**Keywords:** Previous ideas; Bernoulli's equation; educational research; high school education; physics teaching.

---

**Para citar este artículo:** F. Vega-Calderón, L. Gallegos-Cázares, F. Flores-Camacho (2017) Dificultades conceptuales para la comprensión de la ecuación de Bernoulli. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias* 14 (3), 339–352. Recuperado de: <http://hdl.handle.net/10498/19221>

---

## Introducción

### ¿Por qué las ideas previas influyen en la enseñanza de las ciencias?

Con base en sus experiencias, todo individuo puede reconocer características y construir patrones sobre lo que observa en el comportamiento de las cosas, de las personas o de sí mismo. Este cúmulo de peculiaridades identificadas de las experiencias, inmersas a la vez en un contexto cultural y/o fenomenológico determinado, conforma en el sujeto ideas previas con las cuales está en posibilidad de predecir sucesos y conductas, además de construir una perspectiva sobre la organización del mundo que le rodea al dotarle de significado (Pozo 1999).

En el caso del aprendizaje de conceptos científicos, una de las dificultades para ello radica en las ideas que los estudiantes han construido y que en muchos casos son incommensurables o insuficientes, para comprender los conceptos científicos que se les presentan en clase. Por ejemplo, cuando a un alumno se le explica cierto concepto científico (v. g. presión), trata de asociarlo con el significado que tiene de éste como manifestación de sus ideas previas (Pozo 1999).

Para muchos docentes las ideas previas de los estudiantes pasan desapercibidas; incluso, las dificultades de comprensión que surgen en los alumnos debido a ellas, también pueden encontrarse entre los profesores y en algunos libros de texto (Lehrman 1982). Por ello, para el docente debería ser fundamental identificarlas en sus alumnos antes de tratar algún tema, con el objetivo de planear y adecuar una estrategia de enseñanza acorde a las necesidades de aprendizaje de los estudiantes para que puedan transformar, gradualmente, sus ideas y sean más próximas a las aceptadas por la ciencia (Gómez y Pozo 2009, Pozo 1999, Vega 2015).

Aún es difícil precisar el origen de las ideas previas de los sujetos. Sin embargo, se tiene presente la influencia de los fenómenos físicos cotidianos que experimentan en diferentes contextos, donde juegan un papel importante las experiencias sensoriales que les llevan a construir lo que algunos autores denominan *física intuitiva* (Carrascosa 2005). Como resultado de múltiples investigaciones, se han identificado varios aspectos de las ideas previas que sugieren por qué son influyentes en los estudiantes al momento de construir explicaciones o de estudiar conceptos científicos. Algunas de estas características son: 1) se resisten a ser transformadas, pero esto no significa que no se puedan modificar; 2) son de carácter implícito, puesto que los alumnos las emplean sin que sean conscientes de los esquemas y teorías que utilizan; 3) tienden a estar ligadas al contexto bajo el cual se presenta cierto fenómeno (Gallegos 1998, Vega 2015). Así, sucesos que pueden considerarse semejantes desde el punto de vista científico son interpretados differently por los estudiantes y, en consecuencia, elaboran explicaciones particulares del mismo fenómeno cuando el contexto fenomenológico cambia (Driver 1988).

En décadas recientes la investigación sobre ideas previas en varios campos científicos ha sido muy amplia; empero, existen temas insuficientemente explorados. Uno de esos campos corresponde a la Dinámica de Fluidos y, en particular, a la comprensión de la ecuación de Bernoulli. En contraste, existen diversas investigaciones sobre ideas previas en Hidrostática, como por ejemplo la realizada por Barral (1990) acerca de la flotación o por Flores y Gallegos (1998) abordando el concepto presión.

A lo largo de la revisión bibliográfica realizada, no se encontró antecedente alguno que aborde las ideas previas de los estudiantes del bachillerato sobre la ecuación de Bernoulli. Lo más cercano es el estudio de Recktenwald, Edwards, Howe y Faulkner (2009) acerca de *errores conceptuales* de estudiantes de ingeniería sobre la ecuación de Bernoulli. En su estudio, Recktenwald *et al.* (2009) utilizaron un dispositivo que consta de un tubo delgado conectado inmediatamente a otro más grueso por el que se hace pasar un flujo de aire. El objetivo de este ejercicio fue mostrar que la ecuación de Bernoulli es inadecuada para la descripción fenomenológica del flujo a través de dicho sistema bajo ciertas condiciones, en contra de lo que muchos de los alumnos pensaban sobre la supuesta aplicación general de la ecuación de Bernoulli.

Debido al escaso conocimiento que se tiene de las dificultades de comprensión de la ecuación de Bernoulli, se consideró relevante averiguar ideas previas de los alumnos del bachillerato sobre fenómenos que se interpretan cualitativamente mediante este modelo. De este modo, los objetivos de este trabajo son:

- Averiguar ideas previas de los estudiantes sobre la relación entre las variables presión estática y rapidez del flujo.
- Identificar las tendencias de razonamiento y dificultades conceptuales de los estudiantes, basadas en sus ideas previas, que dificultan la comprensión de la ecuación de Bernoulli.

Para contar con un marco adecuado de interpretación de los fenómenos planteados en el instrumento usado en el presente estudio (cuestionario escrito), a continuación se describen

algunas observaciones sobre el significado físico de la ecuación de Bernoulli. También se indican algunas dificultades en su comprensión y uso.

### Observaciones sobre el significado de la ecuación de Bernoulli y de sus alcances

La ecuación de Bernoulli (ecuación 1) es consecuencia del principio de conservación de la energía mecánica en un flujo ideal, el cual se supone incompresible, irrotacional, no viscoso y estacionario. Esta ecuación, como se conoce hoy en día, fue derivada por Leonhard Euler, quien determinó matemáticamente que la presión es un campo escalar variable en el espacio y el tiempo (Anderson 1991, Anderson y Eberhardt 2001, Levi 2001, Truesdell 1975). Una de las dificultades en la enseñanza y comprensión de esta ecuación es, por ejemplo, que no se identifica cómo se determinan las presiones que conforman cada término de ella, así como su significado físico (Anderson y Eberhardt 2001, Vega 2015). Por ello, brevemente se referirán estos aspectos que deberían considerarse en el estudio de la ecuación de Bernoulli:

$$p + \rho gh + \frac{1}{2} (\rho v^2) = \text{constante.} \quad (1)$$

En la ecuación 1, el término  $p + \rho gh$  se identifica como la *presión potencial*, mientras que el término  $\frac{1}{2} (\rho v^2)$  corresponde a la *presión dinámica* del flujo (Hurt 1965). A la vez, la suma de estos elementos conforma la presión total del flujo que, en el caso de un flujo confinado al cual no se le transfiera energía extra, es constante a lo largo de una línea de corriente (Anderson y Eberhardt 2001). Para un flujo ideal (cuya densidad es  $\rho$ ) a través de un tubo horizontal, la ecuación de Bernoulli adopta la forma

$$p + \frac{1}{2} (\rho v^2) = \text{constante.} \quad (2)$$

En esta expresión la presión dinámica está representada por el término  $\frac{1}{2} (\rho v^2)$ ; mientras que la presión potencial corresponde a la presión estática  $p$ . A la vez, la suma de estos términos conforma la presión total del flujo, la cual puede determinarse mediante un sensor posicionado en la dirección del flujo, de tal manera que lo encare o enfrente (figura 1); por ello, también a esta magnitud se le conoce como *presión de impacto* (Martin 1983). En cambio, la presión estática se mide perpendicularmente a la dirección del flujo mediante otro sensor conectado a través de un orificio en la pared del tubo (Anderson y Eberhardt 2001). Conocida la presión total y la estática respectivamente, la presión dinámica puede medirse mediante la diferencia de las anteriores (Anderson y Eberhardt 2001, Vega 2015).

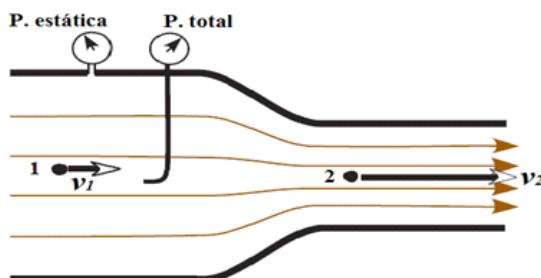


Figura 1. Segmento de un tubo con secciones transversales distintas, a través del cual pasa un flujo ideal de izquierda a derecha.

Para el flujo de la figura 1 a través del tubo horizontal cuyas secciones transversales  $A_1$  y  $A_2$  son distintas ( $A_1 > A_2$ ), con base en la ecuación 2 y en la ecuación de continuidad  $A_1 v_1 = A_2 v_2$  (como consecuencia de la conservación de la masa), puede identificarse que un cambio en la presión estática del flujo está asociado con un cambio en su rapidez, de tal manera que la constante a la cual se hace referencia en la ecuación 2 sea la misma. Por ejemplo, en la parte más estrecha de un tubo la presión estática es menor; mientras que la rapidez del flujo es mayor. También en esta situación, cuando el flujo está confinado, es válido decir que *todo incremento en la rapidez del flujo en cierta región estará asociado a un decremento en la presión estática*, o viceversa (Anderson 1991). Esta última afirmación ha dado lugar a malentendidos, cuando se ha empleado dicha ecuación para explicar situaciones que involucran flujos que no están confinados (Anderson y Eberhardt 2001, Babinsky 2003, Weltner 2011). En el ámbito escolar es frecuente encontrar estos errores de interpretación cuando se tratan algunos fenómenos de

Dinámica de Fluidos con base en la ecuación de Bernoulli, puesto que bajo determinadas condiciones, el cambio en la presión estática del flujo no se ve influenciado por el cambio en la rapidez de éste; es decir, esta afirmación no es general como suele suponerse (Anderson y Eberhardt 2001, Kamela 2007, Vega 2015).

Bajo la idea de que *a mayor rapidez de flujo la presión disminuye*, por ejemplo Bauman y Schwaneberg (1994) y Brown y Friedrichsen (2011) explican la sustentación de un ala. Esta concepción sobre la relación entre estas variables se emplea en contextos similares para interpretar, inapropiadamente, ese y otros fenómenos en los cuales el flujo de aire no está confinado. Para interpretar adecuadamente fenómenos de flujos no confinados, es necesario considerar los efectos de la viscosidad del flujo sobre la presión estática del mismo, cuando éste se curva sobre algún obstáculo como puede ser un perfil aerodinámico (efecto Coanda), aunándose con las leyes de Newton de la Dinámica (Anderson y Eberhardt 2001). Con los elementos descritos sobre los errores de interpretación de la ecuación de Bernoulli se procedió a desarrollar el presente estudio. A continuación se describe la metodología utilizada.

## Método

### Muestra

La muestra consistió de 54 estudiantes (28 mujeres y 26 varones, alrededor de los 18 años) de la Escuela Nacional Preparatoria Plantel 8 «Miguel E. Schulz», de la Universidad Nacional Autónoma de México. Estos alumnos cursaban la asignatura de Física IV conforme al plan de estudios vigente en el cual se incluye la ecuación de Bernoulli como tema (UNAM-Escuela Nacional Preparatoria 1996).

### Instrumento

Para identificar ideas de los estudiantes sobre las relaciones entre los conceptos presión estática y rapidez del flujo de un fluido, se empleó un cuestionario de diez preguntas repartidas en cuatro contextos fenomenológicos o casos, en los cuales se plantean situaciones donde se involucran gases y líquidos confinados en movimiento (Apéndice 1). En el instrumento se pide que predigan y expliquen cada fenómeno y que justifiquen sus respuestas. Cabe aclarar que para contestar el cuestionario, a la muestra no se le hizo mención previa de la ecuación de Bernoulli. Brevemente se describen los cuatro casos:

- Caso 1 (medidor de Venturi): Con este caso se pretende identificar cómo los estudiantes relacionan las variables presión estática ( $p$ ) y rapidez ( $v$ ) del flujo de aire a través de un medidor de Venturi en dos puntos ubicados en las diferentes secciones del tubo horizontal a un mismo nivel. También, se busca identificar cómo representan la posición del agua contenida en el manómetro o tubo en forma de «U» (figura 1.1 del cuestionario), con base en la relación que consideran guardan las presiones estáticas en ambas regiones.
- Caso 2 (recipientes iguales orientados diferentemente y con un orificio inferior): Mediante esta situación se busca identificar si los estudiantes consideran que la rapidez del flujo de agua (el cual sale desde un orificio pequeño ubicado en la esquina derecha inferior de cada recipiente) depende de la forma que adopta el líquido dentro de cada contenedor, a pesar de que la altura de agua contenida es la misma en ambos (figura 2 del cuestionario).
- Caso 3 (botella llena de agua que tiene un orificio inferior): En este caso se persigue conocer cómo los estudiantes consideran que cambia el flujo de agua que sale del orificio inferior de la botella cuando a ésta se le introduce aire por la boca soplando, y si sólo en esta situación suponen que existe presión o si ésta cambia.

- Caso 4 (embudo con un cono de papel en su interior): Por medio de este caso presentado físicamente a los estudiantes, se pretende identificar cómo justifican el hecho de que al ingresar un flujo de aire en el embudo, el cono de papel permanece dentro de aquél (figura 4 del cuestionario); a pesar de que, intuitivamente, suponían previamente que saldría dicho obstáculo.

### Criterios para la evaluación de respuestas

Para evaluar las respuestas de los estudiantes se construyó, para cada caso, un criterio de evaluación conformado de cinco categorías a las cuales se les asignó un valor dependiendo del grado en que sus explicaciones se acercaban a la interpretación física. Por ejemplo, para la categoría I (muy bien) el valor asignado es de 5 y, a partir de éste, en orden descendente se llega al valor de 1 para la categoría V (muy mal). En las categorías I (muy bien) y II (bien) las explicaciones se aproximan a la interpretación física; mientras que en la quinta categoría (muy mal) se comprenden las respuestas inconsistentes ya sea por incoherencia o por falta de completitud. En la tabla 1 se sintetiza la descripción de las características de las respuestas de acuerdo a cada categoría de evaluación.

**Tabla 1.** Características generales de los argumentos incluidos en cada categoría de evaluación para cada caso.

Categoría de evaluación	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
I. Muy bien	Representación correcta del agua en el manómetro. El comportamiento del flujo se describe conforme a la ecuación de Bernoulli.	Opción b ( $v_A = v_B$ ). La rapidez del flujo depende de la profundidad a la cual se ubica el orificio inferior; sin importar la orientación o forma del recipiente.	La rapidez y el alcance del flujo cambian al introducir aire en la botella. La ausencia de flujo se debe a que existe una condición de equilibrio.	La presión (estática) del aire entre ambos cuerpos es menor que la presión atmosférica. Esta diferencia de presión propicia que el embudo no salga.
II. Bien	Representación correcta del agua en el tubo «U». Respuestas basadas en ideas relacionadas con el concepto presión.	Opción b. Ello se debe a la misma altura de agua contenida en ambos envases; sin ofrecerse más detalles en los argumentos.	La rapidez y el alcance del flujo cambian al introducir aire en la botella. Al justificar la ausencia de flujo, no se precisan las presiones en el sistema.	La presión atmosférica es mayor que la presión (estática) en el embudo, sin especificarse la región del embudo al cual se refiere.
III. Parcialmente bien	La relación entre rapideces no es acorde a la diferencia de presión correcta.	Opción b. La presión en ambos recipientes es la misma, sin que se especifique cuál presión (v. g. presión atmosférica, presión hidrostática, etc.).	La ausencia de flujo se debe a la falta de algún agente causal (como la presión). Igual uso de los conceptos <i>presión</i> y <i>fuerza</i> .	No se precisa la relación que guardan dichas presiones (v. g. no se especifica si ambas presiones son diferentes).
IV. Mal	Representación incorrecta del agua en el manómetro, pero coherente con la supuesta relación entre presiones. Uso de ideas basadas en las diferentes secciones del tubo de Venturi.	Opción b, debido a la misma cantidad (o volumen) de agua contenida. Aquí se incluyen respuestas cerradas incorrectas, basadas en ideas relacionadas con la diferente orientación de los recipientes.	El cambio en la rapidez y en el alcance del flujo se debe a la presión del aire introducido, y no al cambio de esta variable.	La explicación se basa en la acción de algún agente causal (como el aire), o en la forma del obstáculo (el cono de papel); sin que necesariamente se mencione el concepto presión.

**Tabla 1.** Continuación.

Categoría de evaluación	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
V. Muy mal	Incoherencia entre las presiones y el nivel del agua en el tubo «U». Uso de ideas basadas en la acción de algún agente causal.	La respuesta cerrada es incorrecta, cuya justificación es incongruente o nada satisfactoria.	Argumentos incongruentes al suponerse, por ejemplo, que una diferencia de presión es la causante de la falta de flujo.	La explicación del fenómeno es incongruente o nada satisfactoria por falta de completitud.

Con estos criterios se evaluaron por alumno todas las respuestas en cada uno de los cuatro casos. Por ejemplo, en el caso 3 donde hay cuatro preguntas puede suceder que una respuesta de ellas esté mal, pero las demás estén bien, en tal situación las cuatro explicaciones comprendidas en este caso se consideran globalmente bien. En relación con la primera categoría (muy bien), no se persigue que las respuestas de los estudiantes concuerden totalmente con la interpretación física o que se mencione explícitamente la ecuación de Bernoulli, lo que se toma en cuenta es que los argumentos sean cercanos y acordes a ésta.

## Resultados

En esta sección se presentan los datos obtenidos de las respuestas de los alumnos al cuestionario. Después, se hacen algunas observaciones sobre la manera en que los estudiantes relacionan las variables presión estática y rapidez del flujo al justificar cada caso. Posteriormente se resumen las principales ideas previas de la muestra acerca de dichos fenómenos.

Los datos presentados en la tabla 2 muestran la tendencia de las respuestas de los estudiantes sobre los cuatro casos.

**Tabla 2.** Tendencias de las respuestas para cada uno de los casos. Porcentaje de alumnos por categoría (%).

Categoría de evaluación	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
I. Muy bien	0	1,85	0	0
II. Bien	1,85	7,41	1,85	0
III. Parcialmente bien	7,41	9,26	38,89	7,41
IV. Mal	48,15	75,93	48,15	88,89
V. Muy mal	42,59	5,56	11,11	3,7

## Análisis

Para el análisis de la información, sólo se consideraron las explicaciones comprendidas en las categorías III y IV debido a que en ellas se encuentra la mayor parte de las respuestas, pues como se observa en la tabla 2, las respuestas de muy pocos estudiantes quedaron incluidas en las categorías I y II. También fueron descartadas las explicaciones comprendidas en la categoría V por no brindar información útil sobre las ideas. En la tabla 3 se presenta el promedio del puntaje obtenido en el cuestionario. Este puntaje se obtuvo al promediar, para toda la muestra, el valor asignado a cada caso para cada alumno; de este modo, el rango de este puntaje es [1, 5].

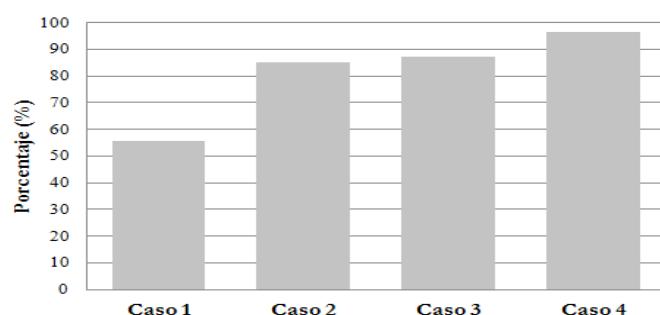
Con base en estos datos puede notarse que para los casos 2, 3 y 4 el promedio del puntaje queda comprendido en el subintervalo [2, 3]; ello significa que al menos en estos tres casos, esos promedios se incluyen en las categorías III y IV. Por otra parte, el promedio del puntaje

para el caso 1 queda incluido en el subintervalo [1, 2], lo que sugiere que dicho valor se comprende en las categorías IV y V.

**Tabla 3.** Promedio de puntaje de evaluación por caso.

	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
Promedio del puntaje	1,7	2,24	2,31	2,04
Desviación estándar de la muestra	0,7	0,75	0,7	0,33
Desviación estándar del promedio	0,1	0,1	0,09	0,05

En la figura 2 se muestra el porcentaje de estudiantes comprendidos en las categorías de evaluación III (parcialmente bien) y IV (mal) por caso. En esta gráfica se corrobora que al menos para los casos 2, 3 y 4, más del 80 % de las respuestas de la muestra quedan incluidas en dichas categorías; mientras que para el caso 1, el porcentaje corresponde al 55,56 %.



**Figura 2.** Porcentaje de estudiantes comprendidos en las categorías III y IV.

### Relación entre las variables presión estática y rapidez del flujo dependientes del contexto fenomenológico de los fluidos en movimiento

A continuación, se presentan algunas ideas de los estudiantes sobre la presión estática y la rapidez del flujo para explicar cada caso. Esto con el fin de especificar gradualmente cuáles son las ideas previas más significativas que subyacen tras sus argumentos, e identificar cuáles de éstas pueden influir en la comprensión de la ecuación de Bernoulli.

#### Caso 1

Con base en la figura 2, el 55,56 % de la muestra está comprendido en las categorías III y IV. El 14,81 % considera que no hay cambio en la posición o en el nivel del agua contenida en el manómetro (tubo «U»), cuando a través del tubo de Venturi pasa una corriente de aire. El 9,26 % justificó esto bajo la idea de que *la corriente de aire empuja al agua por igual en ambos lados del manómetro*. El 5,56 % argumentó que  $p_1=p_2$  usando ideas alusivas al aire en situación de equilibrio: *el aire pasa con la misma fuerza por ambos puntos, y al no haber algo que lo modifique, queda igual la presión*. Otro 5,56 % justificó esta misma igualdad empleando la idea de que los puntos 1 y 2 en el tubo de Venturi están al mismo nivel o altura. Con respecto a las rapideces del flujo en los puntos de medición, 7,41 % escogió la opción  $v_1>v_2$  fundamentando su respuesta en ideas relacionadas con el mayor/menor espacio: *debido a que el cuello del medidor de Venturi es más estrecho, el aire pasa a mayor velocidad en el punto 1 que en el punto 2*.

El 33,33 % de la muestra considera que el agua dentro del tubo «U» cambia su nivel, de tal manera que éste desciende por el brazo conectado al cuello del tubo de Venturi, mientras que por el otro sube. El 24,07 % justificó lo anterior bajo la idea de mayor/menor espacio, al pensar que en dicho cuello el aire se comprime y que, en consecuencia, la presión (estática) es mayor. A la vez, 27,78 % que eligió la opción  $p_1< p_2$  fundamentó su respuesta usando esta

misma idea. Con respecto a las rapideces del flujo, 11,11 % justificó la opción  $v_1 > v_2$  con base en la idea de mayor/menor espacio, al pensar que en la parte más amplia del tubo de Venturi el aire tiene más espacio para fluir y por lo tanto mayor rapidez; mientras que 7,41 % argumentó que  $v_1 = v_2$  empleando ideas alusivas a situaciones de equilibrio. Por último, otro 7,41 % consideró que  $v_1 < v_2$  con base en que *a mayor presión, la rapidez del flujo es mayor*, como consecuencia de las diferentes secciones transversales en el tubo de Venturi.

#### Caso 2

Como se observa en la figura 2, el 85,19 % de la muestra está comprendido en las categorías III y IV. El 37,04 % eligió la opción  $v_A = v_B$ , del cual 12,96 % comentó que la presión o «fuerza» es la misma en ambos envases; mientras que 14,81 % explicó esto con base en la idea de misma cantidad de agua contenida en ambos recipientes, sin hacer referencia a la altura del agua. También se piensa que entre más grande sea el orificio, la rapidez del flujo será mayor; pero esta idea es contradictoria a la interpretación física (ecuación de continuidad). En contraste, 44,44 % de la muestra escogió la opción  $v_A < v_B$ , de la cual 20,37 % fundamentó su respuesta en la idea de la *mayor acción de la presión o de la fuerza* por la forma cónica (o estrecha) que adopta el contenedor B al estar inclinado; mientras que otro 20,37 % supuso que el agente causal es simplemente la inclinación de este recipiente.

#### Caso 3

Con base en la figura 2, el 87,04 % de la muestra está comprendido en las categorías III y IV. El 79,63 % argumentó su respuesta en la pregunta 3.2 (sobre lo que pasará con el flujo de agua al introducir aire en la botella por la boca) diciendo que *el aire introducido ejerce (mayor) presión o fuerza al agua*, y que ello influye proporcionalmente en el alcance y en la rapidez del flujo. Con lo que respecta a la pregunta 3.3 (sobre la manera alternativa de obtener el mismo flujo de agua que en 3.2, pero sin introducir aire en la botella), en la tabla 4 se especifica la proporción de estudiantes que fundamentaron su explicación en alguna idea particular, de la cual se ofrece un ejemplo parafraseado.

**Tabla 4.** Ideas principales usadas para la explicación de la pregunta 3.3 y su porcentaje de uso.

Idea	Presión o fuerza	Altura (o nivel) de agua	Mayor / menor espacio	Inclinación de la botella
Porcentaje de alumnos (%)	40,74	14,81	11,11	11,11
Ejemplo	Apretando la botella, porque <i>se ejerce presión</i> y así también el líquido sale con mayor fuerza.	Si estuviera más llena de agua la botella, ya que así habría más altura.	Aumentando el tamaño del orificio para que aumente la velocidad del agua.	Inclinando la botella y provocando así mayor presión por el orificio.

Pese a la diversidad de interpretaciones para lograr ese mismo flujo de agua, se pudo identificar que en la mayoría de esos argumentos no se especifica que se debe conseguir la misma diferencia de presión inicial, para que se obtenga el mismo flujo. Por último, 68,52 % justificó su respuesta a la pregunta 3.4 (sobre la ausencia de flujo cuando la botella tiene puesta su tapa-rosca) con ideas alusivas a la falta de aire, de presión o de fuerza.

#### Caso 4

Como se observa en la figura 2, el 96,30 % de la muestra está comprendido en las categorías III y IV. En la tabla 5 se especifica la proporción de estudiantes que basaron su explicación de este fenómeno en alguna idea particular.

**Tabla 5.** Ideas principales para las explicaciones del caso 4 y su porcentaje de uso.

Idea	Presión (o fuerza)	La acción del aire	Forma del cono de papel
Porcentaje de alumnos (%)	22,22	44,44	29,63
Ejemplo parafraseado	El aire, al ser un fluido, <i>ejerce presión</i> en todas direcciones de la superficie del cono de papel, haciendo que choque con las paredes del embudo.	El aire se distribuye de manera constante alrededor del cono de papel, y esto hace que no se salga.	El vértice del cono parte el aire y lo distribuye alrededor del cono, empujándolo hacia el embudo.

Bajo el punto de vista de los estudiantes, la justificación de este fenómeno descansa en la idea de que el aire se distribuye uniformemente en la región comprendida entre el embudo y el cono de papel, de tal manera que así éste permanece dentro de aquél. Otros alumnos se explican este suceso considerando que la forma del cono de papel es la causa; piensan que el aire es repartido por el vértice del cono, distribuyéndose alrededor de éste para que siga su curso sin necesidad de sacarlo del embudo. Con lo que respecta a la relación entre las variables presión y rapidez, en este caso no es posible establecer el vínculo que hay entre estos parámetros con base en las ideas de los estudiantes. Esto se debe a que en la mayoría de sus explicaciones, la rapidez del flujo no tiene relevancia, mostrando una conceptualización incompleta del fenómeno al no considerar su aspecto dinámico.

## Discusión

A continuación, se sintetizan las principales ideas previas de los estudiantes que se encontraron en los cuatro casos. Estas ideas, en su mayoría, coinciden con las de otras investigaciones (Besson 2004, Flores y Gallegos, 1998, Gallegos 1998, Gómez y Pozo 2009, Goszewski, Moyer, Bazan y Wagner 2013, Hierrezuelo y Montero 1988, Martín 1983). Posteriormente, se indica cómo esas ideas previas ayudan a explicar las dificultades conceptuales de los estudiantes con relación a la comprensión de la ecuación de Bernoulli.

- El vínculo de la presión con el mayor/menor espacio: Como se ha mostrado, las ideas de los estudiantes sobre la presión están influenciadas por el espacio que ocupa el fluido y/o por la forma que adopta en el contenedor (Besson 2004, Gallegos 1998, Goszewski *et al.* 2013, Martín 1983, Vega 2015). Por ejemplo, en los casos 1 y 2 es evidente el empleo de esta idea, al suponer que la presión es mayor en la constricción del conducto (en el cuello del tubo de Venturi, o en la forma cónica que adopta el recipiente inclinado) y que, en consecuencia, la rapidez del flujo es mayor.
- La presión (o fuerza) es proporcional a la cantidad de fluido: Las ideas de los alumnos sobre la presión se basan en el volumen (o cantidad) de fluido contenido, considerando la existencia de una proporción directa entre estas variables (Besson 2004, Flores y Gallegos 1998, Goszewski *et al.* 2013). En el caso 2 varios estudiantes que se inclinaron por la opción b ( $v_A = v_B$ ) consideraron que la cantidad de agua contenida en ambos recipientes es igual y que, por consiguiente, tienen la misma presión. Con base en esta idea sobre la presión, posiblemente se pensaría que en dos contenedores evidentemente de distinta capacidad, la rapidez de salida del flujo sería mayor en el que tiene más agua, pese a que contengan líquido a la misma altura.
- Los agentes causales sólo actúan en lugares específicos: Sobresale el hecho de que los alumnos suelen atribuir el fenómeno a la acción de cierto agente causal, el cual sólo actúa

en un lugar específico del sistema. Así, en el caso 3 se considera que la presencia de la tapa interrumpe la acción de dichos agentes (aire, presión o fuerza) sobre el líquido (Gallegos 1998, Vega 2015). Pero quizás lo más importante es que en estos argumentos no se hace referencia a un balance de presiones que propicie que el sistema esté en equilibrio (Gallegos 1998, Gómez y Pozo 2009); en su lugar, se recurre a la falta o interrupción de estos agentes causales. Además, en el caso 4 se identificó que en la mayoría de las respuestas no se considera la presión atmosférica (Besson 2004, Vega 2015); centrándose sólo en la presión existente entre dichos cuerpos; en otras palabras, los estudiantes únicamente toman en cuenta la presión en parte del sistema (Gallegos 1998, Hierrezuelo y Montero 1988).

- La presión equivale a fuerza: Los estudiantes tratan el concepto presión como el de fuerza. Asumen que la presión tiene características vectoriales como la fuerza, al suponer que la primera tiene un sentido privilegiado: hacia abajo (Gallegos 1998, Vega 2015). Esto fue observado en el caso 2 para el recipiente inclinado, al referirse que aunque la presión en ambos recipientes es la misma, lo que cambia es el área a la que *se aplica* la presión; por ello en el recipiente inclinado la presión es aplicada a una pequeña área, lo que hace que vaya más rápido el flujo. También ese trato indiferenciado de dichos conceptos se identificó en los casos 3 y 4, al decirse que la presión *actúa* o *se ejerce* sobre algo: *Al aplicar mayor presión sobre una misma área significaría que existe una fuerza mayor. Al haber una fuerza más grande, ésta aceleraría al agua haciendo que salga más rápido* (respuesta a la pregunta 3.2).

Con base en estas ideas previas, las dificultades conceptuales que interfieren en el estudio de la ecuación de Bernoulli tienen que ver principalmente con el concepto presión. Así, por ejemplo quienes tienen la idea de vincular presión con espacio, intuitivamente suponen que esta variable es mayor (o que aumenta) en lugares estrechos, y que en consecuencia la rapidez del flujo es mayor en esa región (Martín 1983, Vega 2015). Esto permite identificar, como resultado, que estas ideas intuitivas sobre la relación entre las variables presión estática y rapidez del flujo son contrarias a la expresada por la ecuación de Bernoulli; de ahí que resulta necesario transformar esas ideas a partir de las dificultades conceptuales que incluyen.

También resaltan las ideas en las que no se toma en cuenta la conservación o el equilibrio de las variables que intervienen en cierto sistema físico y que, en cambio, se usan ideas asociadas a la acción, falta o interrupción de algún agente causal para explicar cierto fenómeno. La ecuación de Bernoulli (ecuación 1) es consecuencia del principio de conservación de la energía mecánica en los flujos ideales; ello implica que para su comprensión, también es necesario que los alumnos construyan explicaciones de fenómenos relacionados que se fundamentan en la conservación, así como que identifiquen el vínculo que hay entre la presión y la rapidez del flujo. Al respecto, en la ecuación de Bernoulli se observa que la presión total del flujo ideal confinado es constante (en un sistema donde la energía se conserva); siendo a la vez una ecuación escalar. Pero si los estudiantes conciben que la presión tenga características vectoriales como las de la fuerza, entonces esto representa otra dificultad en la comprensión de dicho modelo al pensar, posiblemente, que se trata de una ecuación vectorial.

## Conclusiones

En investigaciones previas (Besson 2004, Flores y Gallegos 1998, Goszewski *et al.* 2013) se han estudiado las ideas de los alumnos acerca del concepto presión en la Hidrostática. En cambio, para identificar algunas dificultades conceptuales que interfieren en la comprensión de la ecuación de Bernoulli, fue necesario analizar las ideas de los estudiantes acerca del vínculo que hay entre presión estática y rapidez del flujo. Ciertamente, el concepto presión tiende a ser tratado como el de fuerza; además aquí también fue identificada la concepción que hay entre

presión y espacio, como lo reportan dichas investigaciones. En cambio, no se había reportado que en los contextos tratados la presión estática incremente en las restricciones del conducto por donde pasa el flujo y su rapidez aumenta, como fue advertido especialmente en los casos 1 y 2, lo que influye directamente en la comprensión de la ecuación de Bernoulli.

Lo anterior evidencia que se debe optar por alternativas diferenciadas para la enseñanza de la ecuación de Bernoulli que propicien la transformación de esas ideas previas y las relaciones entre ellas. Por ello, a los alumnos les sería más significativo el aprendizaje de este modelo si se logra comprender que cada término de esta ecuación representa cierta presión en el flujo que se mide de manera diferente con respecto a la dirección de éste. Con la explicitación de esto, posiblemente se evitarían algunas de las ideas previas mostradas por los alumnos, como por ejemplo pensar que la única presión en el flujo es la estática ( $p$ ), la cual a veces ni siquiera es reconocida como tal a causa, posiblemente, del propio desconocimiento de ello por parte de profesores y textos.

De lo encontrado con los estudiantes, es recomendable evitar afirmaciones como *conforme la rapidez de flujo aumente, la presión se reducirá*, ya que esto puede conducir a malinterpretar fenómenos donde haya flujos no confinados, los cuales no se justifican apropiadamente con la ecuación de Bernoulli, sino considerando otros factores que intervienen en la reducción de la presión estática en esos contextos, como el efecto Coanda (Anderson y Eberhardt 2001, Weltner 2011). Por este motivo sería adecuado que los docentes propicien reflexiones y experiencias en los estudiantes que les permitan identificar que bajo determinadas condiciones, el hecho de que el flujo viaje a gran rapidez no necesariamente implica que su presión estática disminuya (Kamela 2007).

## Referencias bibliográficas

Anderson J. (1991) *Fundamentals of Aerodynamics*. New York. McGraw-Hill.

Anderson D., Eberhardt S. (2001) *Understanding Flight*. New York. McGraw-Hill.

Babinsky H. (2003) How do wings work? *Physics Education* 38 (6), 497-503.

Barral F. M. (1990) ¿Cómo flotan los cuerpos que flotan? *Concepciones de los estudiantes. Enseñanza de las Ciencias* 8 (3), 244-250.

Bauman R., Schwaneberg R. (1994) Interpretation of Bernoulli's equation. *The Physics Teacher* 32, 478-488.

Besson U. (2004) Students' conceptions of fluids. *International Journal of Science Education* 26 (14), 1683-1714.

Brown P., Friedrichsen P. (2011) Teaching Bernoulli's principle through demonstrations. *Science Activities: Classroom Projects and Curriculum Ideas* 48 (2), 65-70.

Carrascosa A. J. (2005) El problema de las concepciones alternativas en la actualidad (parte I). Análisis sobre las causas que la originan y/o mantienen. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias* 2 (2), 183-208.

Driver R. (1988) Un enfoque constructivista para el desarrollo del currículum en ciencias. *Enseñanza de las Ciencias* 6 (2), 109-120.

Flores F., Gallegos L. (1998) Partial possible models: An approach to interpret students' physical representation. *Science Education* 82, 15-29.

Gallegos L. (1998) *Formación de conceptos y su relación con la enseñanza de la Física*. Tesis que para obtener el grado de Maestra en Enseñanza Superior. Distrito Federal, México. Facultad de Filosofía y Letras, UNAM.

Gómez M., Pozo J. I. (2009) *Aprender y enseñar ciencia: del conocimiento cotidiano al conocimiento científico*. Madrid. Editorial Morata.

Goszewski M., Moyer A., Bazan Z., Wagner D. J. (2013) Exploring Student Difficulties with Pressure in a Fluid. *AIP Conference Proceedings* 1513, 154-157.

Hierrezuelo M. J., Montero M. A. (1988) *La ciencia de los alumnos*. Barcelona. Editorial Laia/Ministerio de Educación y Ciencia.

Hurt H. (1965) *Aerodynamics for Naval Aviators*. Washington, D. C. Aviation Supplies & Academics, NAVAIR.

Kamela M. (2007) Thinking about Bernoulli. *The Physics Teacher* 45, 379-381.

Lehrman R. (1982) Confused physics: A tutorial critique. *The Physics Teacher* 20, 519-523.

Levi E. (2001) *El agua según la ciencia*. Jiutepec, Morelos. IMTA.

Martin D. (1983) Misunderstanding Bernoulli. *The Physics Teacher* 21, 37.

Pozo J. I. (1999) *Aprendices y Maestros*. Madrid. Alianza Editorial.

Recktenwald G., Edwards R., Howe D., Faulkner J. (2009) A simple experiment to expose misconceptions about the Bernoulli equation. *ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition* IMECE2009-10964, 1-10.

Truesdell C. (1975) *Ensayos de historia de la mecánica*. Madrid. Editorial Tecnos.

Universidad Nacional Autónoma de México, Escuela Nacional Preparatoria. (1996) *Programa de estudios de la asignatura de Física IV*, área I, clave 1611, sexto año.

Vega Calderón F. (2015) *Evaluación de ideas previas de estudiantes del bachillerato sobre la ecuación de Bernoulli*. Tesis que para obtener el grado de Maestro en Docencia para la Educación Media Superior en Física. Distrito Federal, México: Facultad Ciencias, UNAM.

Weltner K. (2011) *Misinterpretations of Bernoulli's law*.

### Anexo 1: Cuestionario usado en esta investigación de ideas previas

A continuación sólo se presentan las preguntas planteadas a la muestra en el cuestionario escrito. Sobre las preguntas 3.4 y 4.1 cabe aclarar que para contestarlas, en parte los estudiantes se basaron en lo que previamente vieron de estas situaciones que se les presentaron experimentalmente.

#### CASO 1

En el tubo Venturi que se ilustra en la figura 1.1 hay conectado, en su parte inferior, un tubo delgado con forma de “U”, el cual contiene agua colorada en reposo; el tubo “U” tiene una sección transversal constante. El Venturi tiene dos secciones transversales  $A_1$  y  $A_2$ , donde  $A_1 > A_2$ . Todo este dispositivo se denomina *medidor de Venturi*. Al agua simplemente se le dio color para distinguirla.  $A_2$  es indicada por el círculo de líneas intermitentes en la parte media del tubo Venturi.

**1.1.** Ahora, a través del Venturi fluye de manera constante una corriente de aire que entra inicialmente por su extremo izquierdo. Bajo esta nueva condición, ¿considera que dentro del tubo «U» hay algún cambio en la posición o en el nivel del agua?, ¿o ésta permanece en reposo? De acuerdo con lo que piensa que pasa, en la figura 1.2 dibuje:

- La forma de la corriente de aire a través de todo el medidor de Venturi.
- El comportamiento o la posición del agua dentro del tubo «U» (o en cualquier otra parte del medidor de Venturi si así lo considera).

Argumente el motivo por el cual dibujó de ese modo el agua.

**1.2.** Como se muestra en la figura 1.2, hay dos puntos señalados con los números 1 y 2 respectivamente, los cuales están en una misma línea horizontal imaginaria dentro del Venturi; es decir, se encuentran a un mismo nivel. En correspondencia con lo que dibujó antes, ¿cómo piensa que es la relación que guardan las presiones  $p$  del aire en estos puntos respectivamente? Justifique la razón de su elección.

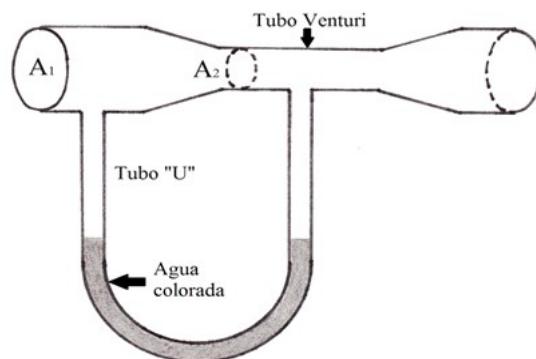
- $p_1 > p_2$
- $p_1 = p_2$
- $p_1 < p_2$
- $p_1 = p_2 = 0$

**1.3.** En esos mismos puntos respectivamente, ¿cómo considera que es la relación que guardan las rapideces  $v$  del flujo de aire? Justifique la razón de su elección.

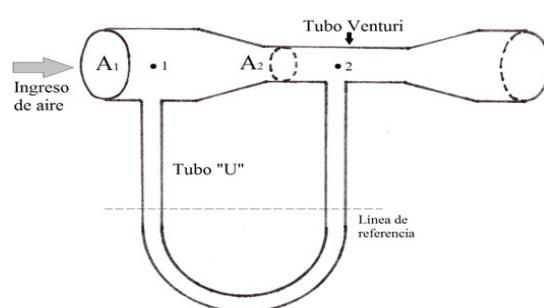
- $v_1 > v_2$
- $v_1 = v_2$
- $v_1 < v_2$
- $v_1 = v_2 = 0$

#### CASO 2

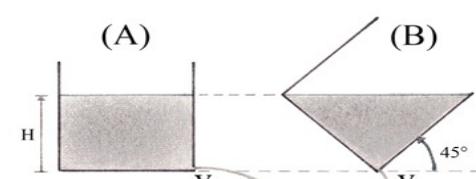
Dos recipientes cuadrados grandes, abiertos e iguales físicamente contienen agua y tienen un pequeño orificio en la esquina derecha inferior. Sin embargo, los recipientes están posicionados de manera diferente como se ilustra en la figura 2, aunque la altura  $H$  de agua es la misma en ambos. Las dimensiones de cada contenedor son mayores que las del orificio por donde se escapa el agua. Con base en las condiciones planteadas, conteste lo siguiente.



**Figura 1.1** Medidor de Venturi. El tubo «U» contiene agua colorada en reposo.



**Figura 1.2.** La línea punteada es una referencia del nivel de agua, antes de establecerse la corriente de aire a través del Venturi.



**Figura 2.** El recipiente (B) está inclinado 45°. La altura  $H$  de agua contenida es la misma en ambos envases. Las dimensiones de los recipientes son mayores que las del orificio inferior.

**2.1.** ¿Cómo piensa que es la relación que guardan las rapideces  $v$  con las cuales, respectivamente, saldrá fluyendo el agua desde el orificio inferior en cada recipiente?

a)  $v_A > v_B$

b)  $v_A = v_B$

c)  $v_A < v_B$

d)  $v_A = v_B = 0$

**Instrucción:** En caso de haber escogido la respuesta a) o c), conteste sólo la pregunta 2.2. Si eligió la respuesta b) o d), conteste sólo la pregunta 2.3.

**2.2.** Conforme a lo que respondió anteriormente, ¿a qué atribuye que dichas rapideces sean distintas? Cuál sea su respuesta arguméntela.

**2.3.** Conforme a lo que respondió anteriormente, ¿a qué atribuye que dichas rapideces sean iguales? Cuál sea su respuesta arguméntela.

### CASO 3

Una botella de plástico, destapada y llena de agua tiene un pequeño orificio en la parte inferior, el cual inicialmente es cubierto con cinta adhesiva. Las dimensiones de la botella son muy grandes a comparación de las del orificio.

**3.1.** En la figura 3.1 dibuje, a su parecer, la forma del flujo de agua tanto dentro de la botella como fuera de ella al retirar la cinta adhesiva que obstruye al orificio. También explique por qué dibujó así el flujo de agua en ambas situaciones.

**3.2.** Ahora suponga que introduce aire en la botella a través de su boca, ¿piensa que habrá algún cambio en la rapidez con la cual saldrá el flujo de agua? Argumente su respuesta y también en la figura 3.2 dibuje, a su criterio, la forma del flujo de agua tanto dentro de la botella como fuera de ella, de acuerdo con esta nueva condición.

**3.3.** Conforme a lo que contestó en la pregunta 3.2, ¿de qué otra manera se podría obtener el mismo flujo de agua fuera de la botella, pero sin tener que introducir (o soplar) aire por su boca? Explique su respuesta.

**3.4.** Ahora a la botella llena de agua se le coloca su tapa-rosca y su orificio inferior está cubierto. Cuando se retira la cinta adhesiva del orificio, ¿hay flujo de agua? Responda esto y también explique a qué se debe que esto suceda así conforme a lo que ve en el experimento.

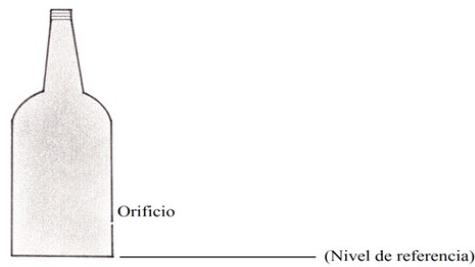


Figura 3.1.

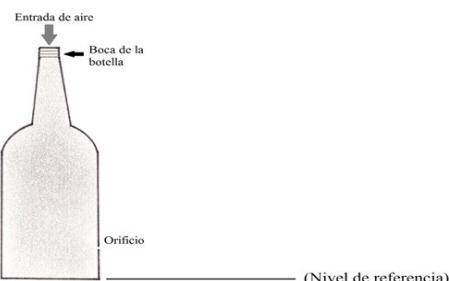


Figura 3.2.

### CASO 4

Un embudo rígido contiene un cono de papel como se muestra en la figura 4.

**4.1.** Cuando se sopla o introduce aire en el extremo izquierdo del embudo, ¿permanece el cono de papel dentro de éste o sale de él? Responda esta pregunta. También explique, a su parecer, a qué se debe que esto suceda así conforme a lo que ve en el experimento.

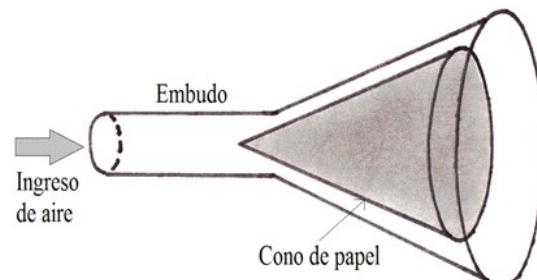


Figura 4. Cono de papel dentro de un embudo rígido. La flecha sólida indica la dirección del flujo de aire que ingresa.