

Las relaciones de orden y las seriaciones

MARISA LUNA ROMERO

«En realidad, si el edificio de las matemáticas reposa sobre estructuras, que corresponden, por otra parte, a las estructuras de la inteligencia, es necesario basar la didáctica de las matemáticas en la organización progresiva de estas estructuras operatorias». (Jean Piaget. *La enseñanza de las matemáticas*).

1. INTRODUCCION

En matemáticas existe un cierto número de nociones fundamentales susceptibles de prolongaciones diversas y sobre las cuales se construyen otras muchas¹. Tal es el caso de las relaciones de orden que intervienen en la construcción del número natural, en todos los mecanismos de operaciones aritméticas, en los sistemas de medida de magnitudes, en la manipulación de cualquier sistema de numeración, en el conocimiento de las figuras geométricas y en la construcción del espacio... Pero esta noción de orden también es básica en la lectura-escritura y en la orientación horaria, por ejemplo, luego es necesario que el niño haya adquirido este concepto al abordar cualquiera de los anteriores sistemas convencionales.

Esto sólo bastaría para justificar el interés que tiene el estudio de este tipo de relaciones. Pero hay también una razón, ya señalada al comienzo, de suma importancia: el papel fundamental que juegan estas estructuras en la adquisición de los mecanismos operatorios².

¹ NICOLE PICARD. *La matemática moderna en los primeros grados*. Buenos Aires. Editorial. 1970, p. 12.

² JEAN PIAGET. *La enseñanza de las Matemáticas*. Madrid. Aguilar. 1963. p. 47.

2. ASPECTOS PSICOLOGICOS Y EXPERIMENTALES DE LAS RELACIONES DE ORDEN

2.1. Génesis de las seriaciones

La seriación (ordenación de un conjunto de elementos según sus dimensiones crecientes o decrecientes) es una operación concreta del pensamiento, según Piaget, entendiéndose como tal «toda transformación reversible e interiorizable que afecte directamente a los objetos y no a hipótesis enunciadas verbalmente»³.

La génesis de esta operación mental, como la de cualquier otra, atraviesa tres niveles claramente diferenciados:⁴

1) Un nivel senso-motor de *acción directa* sobre lo real (cuando un niño de 2 años construye una torre con piezas de encajes de Montessori, por ejemplo, cuyas diferencias dimensionales son inmediatamente perceptibles).

2) Un nivel de *transición* en el que se progresá sobre la acción inmediata que la función simbólica permite interiorizar pero no llega a operatorio (a nivel de representación).

3) Un nivel de *operación* que también afecta a las transformaciones de lo real pero mediante acciones interiorizadas y agrupadas en sistemas coherentes y reversibles. (A los 7-8 años).

La expresión de este último nivel es el *método sistemático de seriar* consistente en buscar, por comparaciones de dos en dos, el primer elemento del conjunto, luego con análogo procedimiento el primero de los elementos restantes, es decir, el segundo de la serie...

El método anterior es operatorio ya que un elemento cualquiera está considerado de antemano como simultáneamente mayor que los precedentes y menor que todos los siguientes, lo que es una forma de reversibilidad (por reciprocidad si $a>b$ entonces $b<a$). Pero al obtener este logro resulta una manera, hasta ahora desconocida para el niño, de composición deductiva: la *transitividad* (a nivel concreto, frente a la doble relación $a>b$ y $b>c$ obtiene $a>c$).

Pero, como en las otras operaciones concretas, existe una diferencia de cinco años para pasar de la mera acción a la operación y es consecuencia de varios factores:

³ JEAN PIAGET. *Seis estudios de psicología*. Barcelona. Ariel. 1983. pp. 76-77.

⁴ JEAN PIAGET y BÄRBEL INHEIDER. *Génesis de las estructuras lógicas elementales*. Buenos Aires. Guadalupe. 1976. pp. 303-315.

—La dificultad de reconstruir en el plano de la representación lo que ya estaba en el de la acción.

—Esta reconstrucción implica una descentralización y la superación del egocentrismo.

—Por último, hay que conseguir una coordinación individual para llegar al nivel operatorio.

Una síntesis de las investigaciones realizadas por Piaget y sus colaboradores sería:

a) «Las estructuras de orden se encuentran en vías de formación en los estadios preoperatorios, desde los comportamientos sensomotorices y durante todo el período que se extiende desde los 2 hasta los 7-8 años».

b) «A partir de los comportamientos sensorio-motrices, el niño es capaz de elaborar empíricamente y empleando un método de tanteos «ensayo y error» un esquema práctico que prepara la seriación».

c) «Pero sólo se trata de un esquema empírico, fundado en una configuración perceptiva y en la desigualdad, inmediatamente percibida, de algunos de los elementos de que dispone». Tal el caso, ya citado del niño que construye una torre.

d) «A esta seriación empírica siguen una serie de etapas preparatorias» (parejas o pequeños conjuntos, no coordinados entre sí, series empíricas con correcciones posteriores...) «para la seriación sistemática».

e) A la seriación sistemática el niño llega «cuando descubre el método que asegura ya la construcción de una serie compleja y exacta, sin tanteos ni errores...».

2.2. Experiencias de seriaciones con niños

Para concretar el proceso anterior hemos *repetido las experiencias de Piaget sobre el tema*⁵. Se reparten al niño diez regletas coloreadas de la misma anchura y de longitudes de 9 a 16,5 cm. y se les pide que las ordene de mayor a menor. Para asegurarnos que sabía de qué se trataba, previamente les dábamos cuatro muñecas para ordenarlas de más alta a más baja (fijar la idea).

Para comprobar si la serie era empírica o no, una vez construida se le daban tres nuevas regletas (con la excusa de haberlas olvidado antes) para colocar. Algunos niños tenían que proceder por nuevos tanteos e incluso, en algún caso, volver a empezar.

⁵ *Idem.* pp. 268-270.

Las edades obtenidas en las experiencias anteriores se adelantan a las señaladas por Piaget.

Además son relativas a la *cantidad de material* usado. Sería mucho más fácil seriар cuatro o cinco regletas que las diez de partida. Pero si aumentamos el número de elementos, conservando entre ellos unas diferencias pequeñas, para necesitar comparaciones, pero perceptibles, la edad del éxito operatorio no se vería modificada pues una vez sistematizado el método de seriар longitudes es posible generalizarlo.

También depende del *tipo de material* usado (estamos seriando longitudes).

La dificultad para seriар masas, utilizando una balanza, es mayor ya que la conservación de masas no se alcanza hasta dos años más tarde.

Seriар de modo operatorio volúmenes por inmersión (teniendo en cuenta la cantidad de líquido que desalojan los objetos) sería más tarde ya que la conservación de estos no se alcanza hasta los 11-12 años.

2.3. Anticipaciones gráficas de seriaciones

Entre las seriaciones empíricas y las operatorias existen unas *semianticipaciones*, que no tienen equivalente en otras operaciones concretas⁶.

Las experiencias realizadas por Piaget son del mismo tipo pero indicando al niño que dibuje de antemano a colores o a lápiz negro si falla la serie que va a construir con los elementos a la vista. Unicamente la forma de conjunto de la serie permanece implícita pues los elementos se perciben realmente. Aunque sea paradójico, hemos comprobado que existe una *anticipación gráfica* de la serie mediante el dibujo sin que el niño sepa construirla de hecho. Parece lógico que ordenar objetos materiales sea más fácil que ordenar símbolos gráficos.

Hemos observado los tres tipos de niveles:

—*Carencia de anticipación gráfica*, acompañada de la imposibilidad de realizar la seriación efectiva ni por tanteos. O sea ni el dibujo está más adelantado que la acción, ni al contrario. Algunos niños dibujan parejas o tríos sin coordinar entre sí y al hacer la serie proceden de la misma forma (Lorena). Otros ni siquiera consiguen dibujar un comienzo de serie (Manolo).

—*Semianticipaciones*, aunque no haya correspondencia exacta de colores, ni del número de regletas a seriар, el resultado final es un dibujo

⁶ *Idem.* p. 273.

correcto de la serie (Leticia). Pero no son capaces de realizarla sin tanteos y algunos ni aun así.

Pero esta *anticipación gráfica* no es operatoria ya que *no exige la transitividad*; los elementos sucesivamente dibujados no se comparan dos a dos entre ellos, se van añadiendo en un solo sentido de variación. Se anticipa el resultado global a obtener, no los pasos necesarios para obtenerlos.

—Se anticipa gráficamente el resultado con detalle de colores y se consigue hacer la seriación efectiva de modo operatorio. Ambas están al mismo nivel. Si existe algún fallo en el color o en el número de regletas suele ser ocasionado por distracción (Auxi).

Por último, a los niños del primer nivel les pedimos que dibujen la serie ya construida y correcta. Aparecen casos en los que no consiguen alinear los trazos de forma correcta ni en presencia del modelo. Luego para dibujar una serie, parece no ser suficiente la percepción de la misma, esto lo facilita pero no lo determina totalmente, ya que resulta más fácil para el niño hacerlo cuando puede efectuar seriaciones con objetos.

Como *conclusión el esquema de la operación y la imagen anticipadora se abstraen de la acción ejercida sobre los objetos y no de su percepción*, pero están muy relacionados con ella.

Piaget continúa profundizando en el papel de la percepción en la evolución de la seriación, comparando los anteriores resultados con los obtenidos al efectuar seriaciones con objetos análogos pero percibidos mediante el tacto⁷.

Llega a los siguientes resultados (que no hemos comprobado): continúa dándose un adelanto de la anticipación gráfica sobre la seriación efectiva, aunque ambas un poco después que en las series percibidas visualmente.

Este retraso se debe al carácter sucesivo y no simultáneo de las percepciones táctiles (el más grande de los elementos se coloca aparte, ya no se percibe)⁸.

2.4. El orden como concepto geométrico

Junto con las nociones topológicas de *proximidad* y *separación*, la no-

⁷ JEAN PIAGET y ALINA SZEMINSKA. *Génesis del número en el niño*. Buenos Aires. Guadalupe. 1975. p. 124.

⁸ JEAN PIAGET y BÄRBEL INHEIDER. *Op. cit.* pp. 288-289.

ción de orden es de las más primitivas, psicológicamente hablando, para la construcción del espacio en el niño⁹.

La estructura del espacio, por oposición a la operación de seración que es independiente de la posición espacio-temporal de los objetos, está formada por partes próximas que se diferencian entre sí pues están separadas.

El niño *construye la relación «entre»* en el espacio apoyándose en los conceptos de *proximidad, separación y sentido constante de recorrido*.

Para estudiar los estadios que hay que recorrer en la adquisición de este orden geométrico, hemos realizado las siguientes experiencias también descritas por Piaget:¹⁰

a) Reproducción de un orden lineal (hilera de nueve bolas, distintos colores y cordel de ropa recortada en papel) y de un orden cíclico (collar); b) traducción del orden cíclico a lineal; c) construcción del orden inverso al orden lineal dado; d) predicción del orden de un amontonamiento directo o inverso (poniendo la ropa en una cesta, cuando el niño la recoge y después preguntándole), y e) copia de un orden cíclico en falso nudo (collar en forma de ocho) o paso al orden lineal correspondiente.

Se distinguen los *tres estadios*:

—*Fracaso*. Antes de los 4 años el niño, al pedirle que reproduzca un orden lineal, coloca unos cuantos objetos sin preocuparse de copiar el modelo, mucho menos el orden de este.

Al comienzo de este estadio sobre los 4 años el niño coloca los mismos objetos (bolas o ropas) pero sin respetar el orden de colocación. Después comienza a construir parejas o pequeños subconjuntos sin coordinación entre sí.

—*Representación intuitiva del orden* (de 4½ a 6 años).

El niño, al comienzo de este estadio, reproduce el orden lineal cuando puede controlarlo perceptivamente (mirada del elemento original al elemento de la reproducción o tocándolo con el dedo), así conserva el sentido de orientación pero fracasa al hacer un desplazamiento del modelo. También fracasa al pasar del orden cíclico al lineal.

Estos niños establecen una correspondencia intuitiva entre el modelo y la copia pero limitada al caso de la superposición directa entre ambos.

⁹ JEAN PIAGET y BÄRBEL INHEIDER. *Représentation de l'espace chez l'enfant*. París. Presses Universitaires de France. 1981. p. 99.

¹⁰ *Idem*. pp. 100-102.

LAS RELACIONES DE ORDEN Y LAS SERIACIONES

Más adelante, sobre los 5 años, consigue traducir el orden cíclico al lineal pero obtiene el orden inverso.

La movilidad creciente de la intuición, en este nivel, lleva a las articulaciones necesarias para copiar el orden lineal con desplazamientos o traducir el orden cíclico a lineal, pero no consigue resolver los problemas de rotación o del nudo.

—*Logro operatorio del orden* (6-7 años).

Los niños consiguen el estadio de equilibrio necesario para solucionar las cuestiones planteadas (la reversibilidad del pensamiento se refleja en la actividad motriz orientándola).

Las *conclusiones* que se obtienen sobre las condiciones psicológicas de la *construcción del orden geométrico* son:

La diferencia esencial que supone la simple percepción del orden y su reproducción por medio de la imitación material correspondiente del modelo percibido. La primera implica sólo la percepción de las proximidades, la separación de los elementos próximos y un sentido de recorrido en la centración sucesiva de los elementos así separados. La segunda procede igual pero la imagen mental y su reproducción material son comparables a un dibujo, con lo que esto comporta de descomposición del modelo y recomposición a distancia. En el transporte mental entre el modelo y la copia y en el análisis previo a este transporte, hace falta una separación de los elementos cuyo efecto es disociar las proximidades perceptivas. El sentido de recorrido o de orientación, que se debe mantener constante en el transporte, interviene para restablecer las proximidades disociadas.

La acción es la encargada de asegurar esta permanencia del sentido luego de la elaboración de las operaciones.

En principio, la acción de recorrer y transportar de próximo a próximo los elementos separados hasta reconstruir un orden lineal simple.

Después, la acción de modificar el orden perceptivo, por ejemplo cíclico, hasta reducirlo a un orden lineal simple. Es la misma acción pero desarrollada en el sentido de orientación inverso.

Al final, la composición reversible de estas acciones bajo la forma de una coordinación móvil las transforma en operación.

El orden es pues el producto de una reconstrucción de los objetos por medio de acciones ordenadas, y no una cualidad directamente extraída de estos como tales, por lo que el orden físico es reconstruido

gracias a una acomodación de estas acciones que son la fuente del orden geométrico¹¹.

3. ASPECTOS DIDACTICOS

El niño utiliza y escucha muchos términos de comparación que son relaciones «mi hermano es más alto que yo». Todo ello da lugar a un material que debe ser utilizado para que el niño pase a una matematización del concepto de relación de orden. En este proceso, que va desde la acción material sobre los objetos hasta la constitución de la operación, interviene como primer factor fundamental las nociones que como objetivos del aprendizaje de las matemáticas nos propongamos que logren los niños. El segundo factor sería las posibilidades y el desarrollo del niño ya tratados.

Como *objetivo de aprendizaje* en el tema que estamos tratando, el niño debe adquirir clara idea de cuándo se encuentra frente a una relación de orden y saber estructurar un conjunto o reconocer cuándo está estructurado según una relación de orden.

3.1. La psicomotricidad como punto de partida

En una situación cualquiera recibimos una multitud de sensaciones simultáneas y sucesivas, es decir, se suceden en un orden espacio-temporal y provienen de los individuos y objetos que nos rodean. El cerebro selecciona y sólo una parte de ellas franquea el nivel de la conciencia para convertirse en percepciones¹².

Cuando una percepción puede ser analizada, memorizada y relacionada con otra adquiere la situación un valor educativo. Conviene fijar la atención en *los contrastes* o percepciones opuestas pero del mismo orden, grande-pequeño por ejemplo, que son los primeros conjuntos de dos elementos que aparecen ordenados según Lapierre.

Para ello se sigue un doble proceso: oposición de dos contrastes para el descubrimiento y vivencia de muchas situaciones perceptivas para la generalización.

El niño de Preescolar ya es capaz de manejar conjuntos ordenados más ricos en elementos. Por ejemplo, *los ritmos* (pequeños núcleos or-

¹¹ *Idem.* pp. 124-125.

¹² A. LAPIERRE y B. AUCOUTOURIER. *Los contrastes y el descubrimiento de las nociones fundamentales*. Barcelona. Científico-médica. 1977. p. 32.

denados que se repiten cíclicamente) se perciben y se simbolizan casi espontáneamente.

Como modelo de actividad proponemos: después de distinguir un contraste concreto (palmada fuerte-palmada débil) construir ritmos para que los niños los repitan, continúen y representen espontáneamente. Suelen aparecer las dos o tres posibilidades que Lapierre tiene descritas¹³. Después, dadas dos situaciones que corresponden a la misma estructura, los niños son capaces de simbolizarlas de la misma forma. Por último, dada la representación, pedirles que pasen a situaciones perceptivas concretas.

Pero antes incluso de agotar las asociaciones de contrastes y de haber estructurado los ritmos, el niño se da cuenta que entre los contrastes existen una serie de grados intermedios: *los matices*.

Paralelamente a lo anterior, se trabaja la *ordenación espacial*. Existen las tres direcciones espaciales privilegiadas y los recorridos en el espacio están orientados. Si un recorrido pasa por tres puntos, dichos puntos aparecen ordenados en el espacio. Lapierre considera que la ordenación es independiente del soporte en los recorridos. Como modelo de actividad, proponemos pasar de una situación en la que varios niños lleven un objeto cada uno a otras en las que, manteniendo el orden inicial de colocación, los niños se hayan desplazado. Se obtendrán así, distintas posiciones espaciales de los objetos¹⁴.

Estos recorridos junto con la ordenación espontánea del tiempo vivido (tiempo subjetivo) que el niño hace, le llevarán a la estructuración del espacio.

3.2. Las representaciones gráficas

La representación gráfica de relaciones de orden *por medio de flechas o diagramas* deben ser actividades a realizar. El aprendizaje por parte del niño debe darse en dos sentidos: representación gráfica de relaciones e interpretación y reconocimiento de relaciones a través de sus representaciones.

Las actividades que se propongan deben seguir una secuencia de dificultad creciente.

¹³ A. LAPIERRE y B. AUCOUTOURIER. *Asociaciones de contrastes. Estructuras y ritmos*. Barcelona. Científico-médica. 1977. pp. 127-129.

¹⁴ A. LAPIERRE y B. AUCOUTOURIER. *Simbología del movimiento*. Barcelona. Científico-médica. 1977. pp. 12-15.

En los primeros niveles se trabajarán pares de relaciones de orden total (todos los elementos del conjunto están relacionados) representándolos mediante diagramas de libre creación, señalando los pares de elementos relacionados. Por ejemplo, con la relación «es más alto que».

Después se pasará a presentar la situación inversa: dar el diagrama y que los niños determinen los pares de elementos que verifiquen la relación.

A nivel de Ciclo Medio de E.G.B., los niños analizarán gráficos y organigramas que con frecuencia aparecen en periódicos, sacando conclusiones de las relaciones establecidas en tales diagramas. Por ejemplo, los itinerarios de una compañía naviera o del metro (Figura 5).

Para pasar ya a nivel de Ciclo Superior, a trabajar con representaciones de relaciones de orden parcial (existen pares de elementos del conjunto ordenado que no están relacionados). Un buen ejemplo, se presenta al estudiar la relación de divisibilidad en el conjunto de los números naturales.

Ya se puede trabajar esta relación mediante representaciones en diagramas de Hasse, de los divisores de un número por ejemplo.

3.3. Otras actividades de seriaciones

El niño, según lo dicho al hablar de la génesis de la seriación, de 1º de E.G.B. ya está en condiciones de comenzar con la seriación sistemática de longitudes. El profesor debe proponer una serie de actividades que cubra las etapas intermedias que van desde la seriación empírica hasta la seriación sistemática. Estas actividades deben consistir en el ordenamiento de objetos utilizando relaciones familiares al niño: «más largo que», «más grueso que». Hay que observar que los objetos presentados para seriar deben ser invariantes en todas aquellas cualidades que no correspondan al criterio de seriación pedido, así para seriar varillas según su longitud, éstas deben ser del mismo grosor.

Además hay que señalar que cuando se trate de ordenar por tamaño un conjunto de figuras, es conveniente que sean semejantes entre sí (ángulos respectivos iguales y lados respectivos proporcionales), pues pueden plantearse situaciones ambiguas que inducen a error. Por ejemplo al seriar rectángulos.

Los niños harán manipulando las seriaciones y se verbalizarán las situaciones, planteando cuestiones sobre la relación y la inversa (más largo y más corto), para trabajar simultáneamente con las dos relaciones. Se pueden plantear otras actividades: obtenida una serie retirar algunos objetos para que los niños vuelvan a construirla; ampliaciones intercalando nuevos elementos; etc.

LAS RELACIONES DE ORDEN Y LAS SERIACIONES

Para el orden geométrico se propondrán actividades de reproducciones de orden lineal, de orden cílico...

Todas estas actividades servirán para que *el niño experimente y actúe* realizando ordenaciones y para que *el profesor conozca el nivel* en el que cada niño se encuentra.

RESUMEN

El estudio desde el punto de vista psicológico de seriaciones y ordenaciones, nos permite plantear una serie de actividades en toda la E.G.B. (destacando el trabajo con las representaciones mediante flechas de las relaciones de orden) que van desde la psicomotricidad hasta el estudio de la divisibilidad en los números naturales.

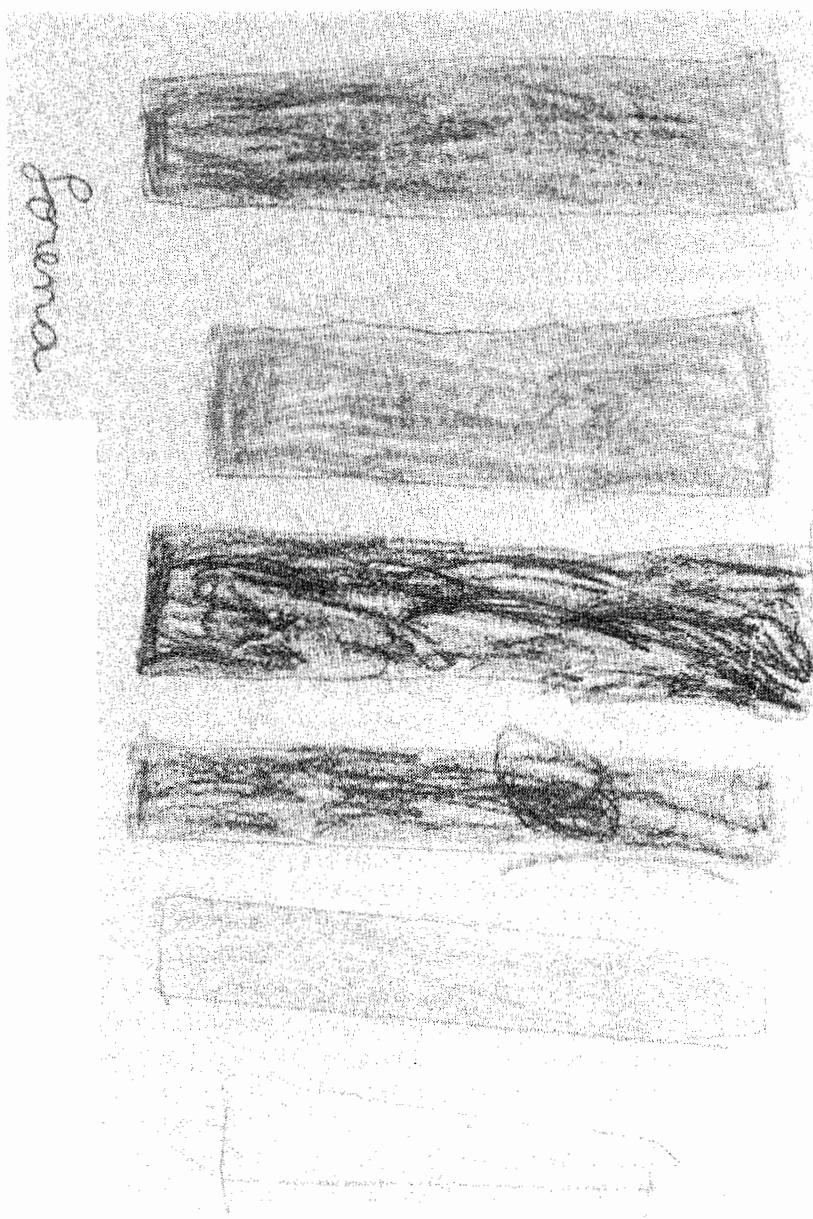
SUMMARY

The study of seriations and relations of order from a psychological standpoint allows us to suggest a series of activities through all the EGB period (stressing the work of presentations by means of arrows from the relations of order) ranging from psychomotoricity to the study of natural number divisibility.

RÉSUMÉ

Du point de vue psychologique, l'étude des sériations et des relations d'ordre nous permet de projeter une série d'activités pour tous les niveaux de l'E.G.B. (nous précisons le travail avec les diagrammes des flèches). Ces activités vont de la Psychomotricité jusqu'à l'étude de la divisibilité dans les nombres naturels.

Figura 1



LAS RELACIONES DE ORDEN Y LAS SERIACIONES

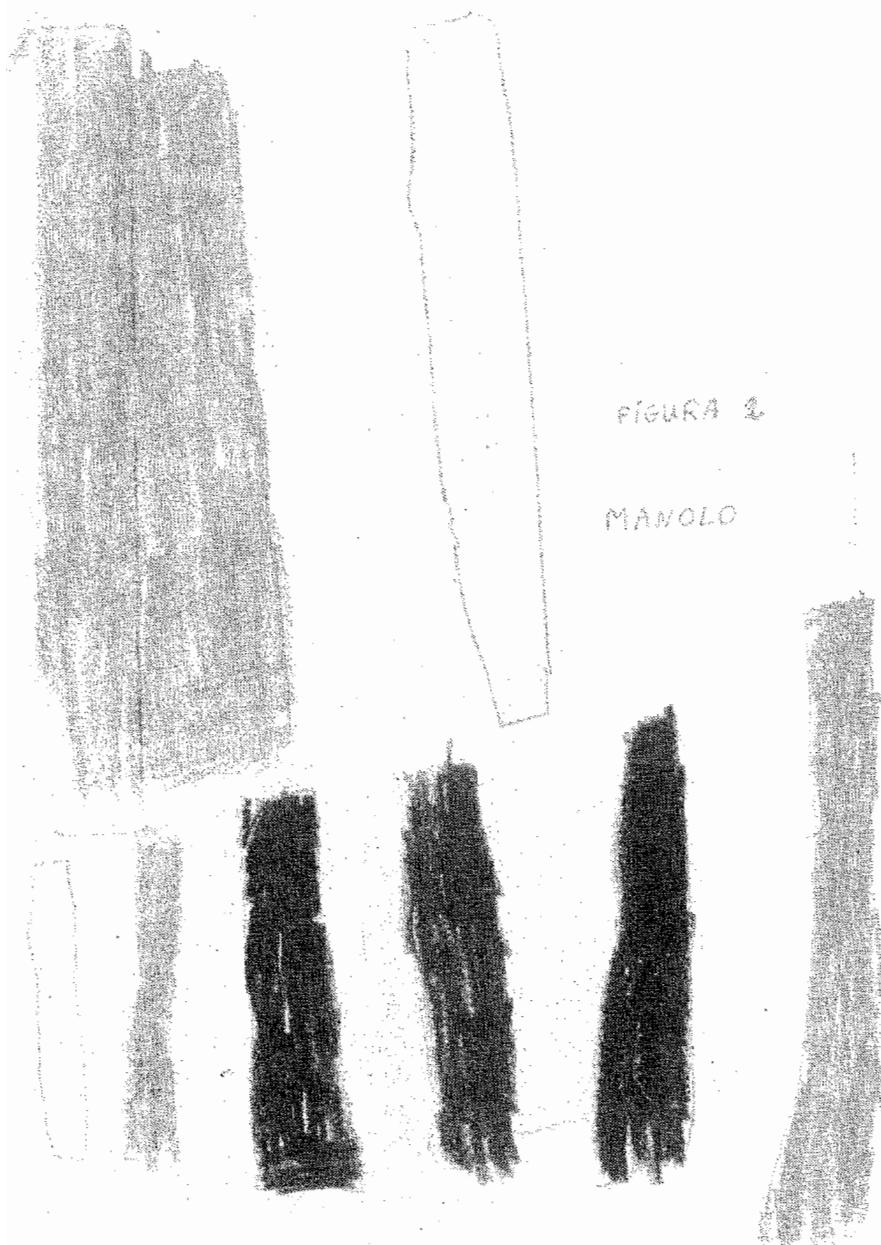


Figura 2

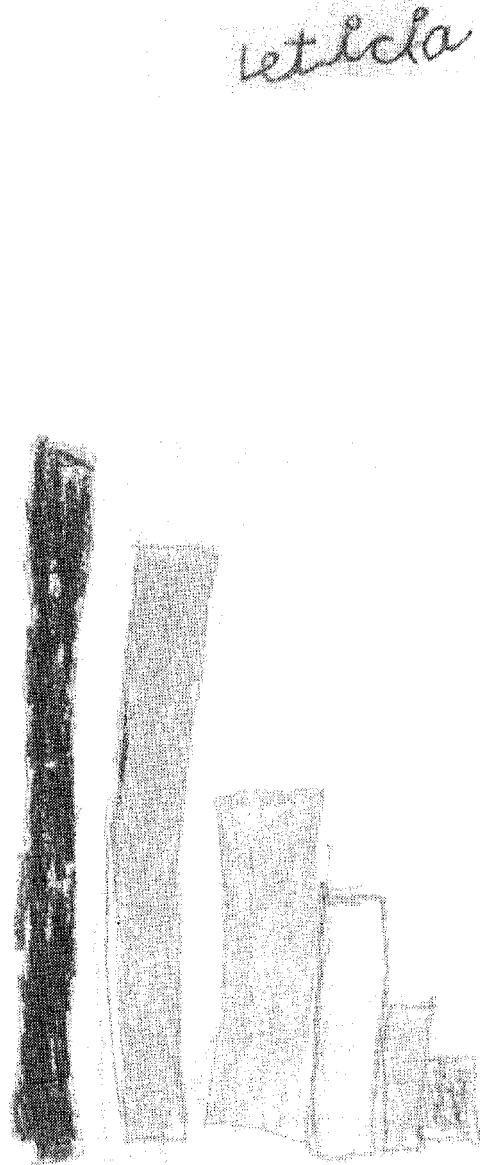


Figura 3

LAS RELACIONES DE ORDEN Y LAS SERIACIONES

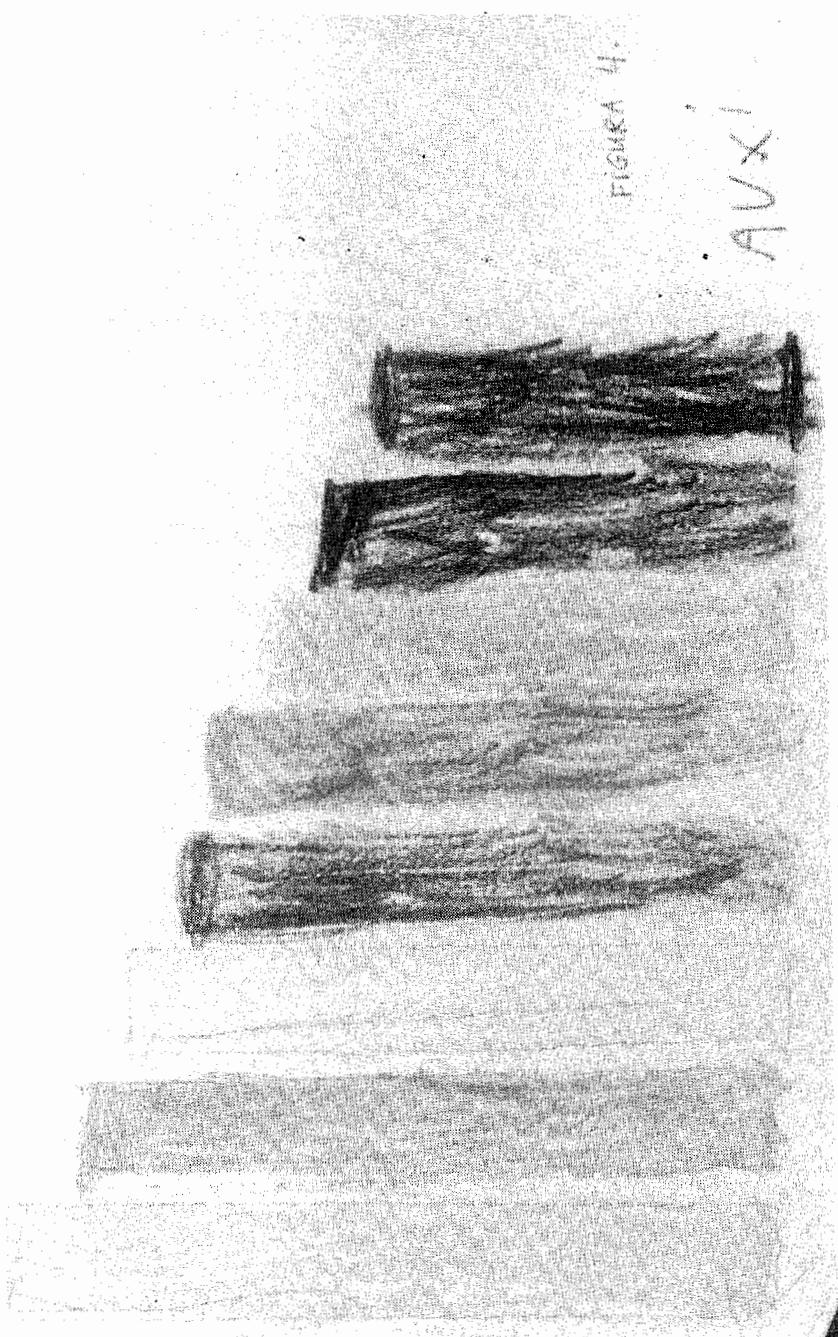


Figura 4

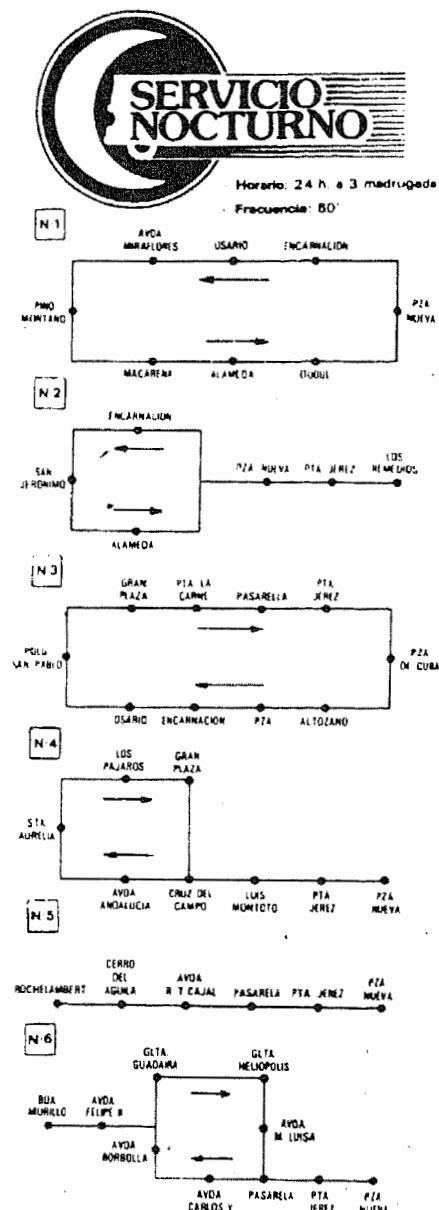


Figura 5