Importancia de los Paevs de una Etapa Algunas indicaciones para su tratamiento en el Aula

JAIME MARTÍNEZ MONTERO.

Los problemas aritméticos escolares verbales (PAEVs en adelante) suponen un procedimiento sencillo y al alcance de los niños para llegar a la matematización de situaciones de la vida diaria, son el campo de entrenamiento en que los alumnos ensayan, practican y separan del ordinario la aplicación del lenguaje matemático. Los problemas aritméticos se convierten en la primera vía que transita el alumno para trascender la realidad, tipificarla y modelizarla, aplicando una forma específica de tratamiento de los datos que es susceptible de volver a integrarse y a explicar, de forma más satisfactoria, esa realidad de la que había partido.

LINDQUIST (1985: 5-6) analiza los contenidos del currículum y señala como una de las tendencias para la década de los 90 el incremento del énfasis en el significado de las cuatro operaciones, perdiéndolo algo en la computación. De otra manera: la conceptualización que está a la base de los PAEVs.

En un primer acercamiento, parece evidente señalar la capacidad que tiene el ser humano, y, por consiguiente, el alumno, para plantearse y resolver problemas. Que el niño "escolar" esté en las primeras fases de su vida significa que tal capacidad también está en embrión y que, para su adecuado desarrollo, necesita de los estímulos y ejercicios adecuados. Los PAEVs pueden ser los primeros puntos de entrenamiento a partir de los cuales comience el desarrollo de, como señala MOSER (1982: 154) "la innata e intuitiva habilidad para resolver problemas que ha sido observada hasta en los niños más pequeños". Naturalmente, no se trata sólo de que se fomente, en términos generales, esa habilidad, sino que también los niños aporten situaciones y alternativas provinientes de su experiencia infantil: "El análisis semántico de los problemas que los niños usan espontáneamente provee de una de las mejores bases para desarrollar las destrezas necesarias para resolver problemas" (ROMBERG y CARPENTER, 1986:856). A través de PAEVs se puede iniciar la vía de categorización de problemas y de tipificación de situaciónes, sirviendo, como señalan DE CORTE y VERSCHAFFEL (1987) para promover la adquisición de conceptos.

Descendiendo algo más, se puede entrar en aspectos más detallados. Comprender y resolver PAEVs exige acceder a determinadas y nada fáciles habilidades y detrezas. STERN (1993), CASE (1988), y M. FORD (1990) hacen hincapié en este aspecto tan importante. Así, por ejemplo, se ahonda en la habilidad para la comprensión del lenguaje y, por consiguiente, en los procesos de procesamiento de la información a ella asociados. A través de los PAEVs se profundiza en la comprensión de situaciónes básicas, así como en la capacidad necesaria para la representación global de las mismas. En una palabra, como bien apuntan BERMEJO Y RODRIGUEZ (1987), detrás de los PAEVs hay un importante factor lingüístico que ayuda a construir los conceptos lógicos (BERMEJO, 1985). Profundizar en el conocimiento semántico o conceptual es, a la postre, necesario para una buena memoria a largo plazo y una capacidad de transferencia más flexible (CASE, 1988).

VERTIENTE UTILITARIA DE LOS PAEVS.

Esta vertiente se pone muy pronto de manifiesto, siquiera sea porque realizar problemas en la escuela es una de las tareas clásicas, de toda la vida y porque (POIRIER, 1991) es otro aprendizaje clásico y de gran peso el de las cuatro operaciones aritméticas. Por parte de los PAEVs se ayuda a este aprendizaje consiguiendo la mayor comprensión de estas operaciones cuando se las reconoce en un contexto de resolución de problemas. Dicho de otra manera, la primera dimensión utilitaria viene de la consideración de que el trabajo con PAEVs es algo muy frecuente y que puede coadyuvar a otro aprendizaje fundamental: las operaciones básicas.

Los PAEVs han sido, tradicionalmente, el lugar natural por donde los alumnos se introducían en la aritmética aplicada. Cuando se habla de aritmética aplicada parece que se habla de algo menor, sin repercusiones o trascendencia. Todo lo contrario, porque la aritmética aplicada es "la parcela más significativa del conocimiento para la vida futura y es frecuentemente definida como una de las destrezas más básicas para el ciudadano común" (NESHER, 1980:41). CASTRO MARTINEZ, RICO y GIL (1992:244) lo dicen de forma similar: "Los problemas aritméticos verbales se incluyen en el currículo escolar con la finalidad, entre otras, de facilitar al alumno este acercamiento entre Aritmética y realidad, entre Aritmética y aplicaciones a la vida real, que hacen más significativo y valioso su estudio". También hay que señalar que es a través de problemas por resolver y de situaciones no previstas de donde emerge el conocimiento, como muestra la historia de las ciencias.

LOS PAEVS Y LA EDUCACION MATEMATICA.

Los PAEVs son fuentes de productivas situaciones matemáticas, el lugar done se comienza a engarzar el lenguaje matemático con el real, ofrecen un marco motivador para desarrollar destrezas de búsqueda de ecuaciones y de capacidad de cálculo y, sobre todo, pueden ser el instrumento adecuado para el desarrollo de los conceptos que sustentan a las operaciones básicas. Para ello, hay que ir algo más allá de muchas de las actuales prácticas escolares.

GREER (1992) opina que los PAEVs de multiplicar y dividir se emplean con muy poca variabilidad de situaciones. LUKE (1988) advierte de los peligros (ya señalados por FISCHBEIN ET AL, 1985) de ofrecer el ejercicio de una operación (p.e., el producto) presentado siempre como una suma de sumandos repetidos. Ello da lugar a algo no siempre previsto ni esperado: que no se pueda identificar saber sumar o multiplicar, p.e., con saber cuándo se debe sumar o multiplicar. De acuerdo con los Chelsea Tests (W. BELL, COSTELLO, KUCHEMAN, 1983), la correlación existente entre la destreza de saber efectuar la operación y la de saber cuál y con qué números hay que emplearla es de .40 en el caso de la adición, la sustracción y la multiplicación. Para la división la correlación baja hasta .27. Quiere decir que la variabilidad común es, en el mejor de los casos, del 16%. Por ello, hay que ir a potenciar más el uso de los PAEVs como instrumento de desarrollo matemático.

En principio, cabe apuntar a algo que dicta el sentido común: es preferible que las cuentas se aprendan en el marco de las situaciones que se producen, y no de manera aislada. Esto ya sería un gran avance a la vista del gran número de cuentas que se realizan en la escuela. Este tratamiento introduce un giro fundamental: la suma, la resta, la multiplicación y la división no se enseñan como etiquetas descontextualizadas, sino insertas en situaciones. Las operaciones o cuentas pueden ser isomorfas con diversas situaciones. De este modo, se accede a un nivel conceptual superior a la hora de aprender los algoritmos.

En este apartado se producen muchas coincidencias: los PAEVs son el marco ideal donde se debe desarrollar el concepto de operaciones. ROMBERG y CARPENTER (1986:856) afirman que "los PAEVs serían usados como una base para desarrollar la adición y sustracción, más que para enseñar primero destrezas para computar y después aplicar esas destrezas a resolver problemas". Algo muy similar afirman DE CORTE y VERSCHAFFEL (1987).

Además de servir de marco conceptual para el desarrollo de las operaciones básicas, los PAEVs desarrollan la habilidad para encontrar la ecuación y resolver cálculos, aportan productivas situaciones matemáticas (FUSON, 1992) y es el territorio adecuado para producir el primer acercamiento entre el lenguaje puramente matemático y el lenguaje de la vida real (NESHER, GREENO y RILEY. 1982). Es posible pensar si incluso, en un primer momento, resolver problemas no es aprender a trasladar el lenguaje ordinario de todos los días al lenguaje matemático.

LOS PAEVS Y LA MEJORA DEL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE.

Trabajar con todos los tipos de PAEVs supone tener a mano toda una serie de actuaciones de prevención del fracaso en la enseñanza de los problemas. Este sería el argumento fundamental, que puede desglosarse en los diversos componentes que lo constituyen.

En primer lugar, supondría garantizar que se iba a cubrir una gama completa de situaciones que pueden ser modeladas por problemas. Muchas de estas situaciones no suelen ser tratadas, lo que no quiere decir que no tengan apariciones esporádicas, enmascaradas en uno u otro tipo de problemas, a lo largo de la escolaridad y, en ocasiones, en situaciones de evaluación. Puede ocurrir también que sea restringido el campo de problemas de una etapa que tenga que realizar el niño a lo largo de su escolaridad, pero también suele suceder que problemas de más de una etapa sí incorporen situaciones que no han sido tratadas con anterioridad. ¿Por qué, por ejemplo, un alumno no sabe resolver un problema de dos etapas? ¿Falla en la destreza específica de los problemas de dos etapas o está el error en no dominar alguna de las dos situaciones simples de que se compone el problema de dos operaciones? El tratamiento correctivo deberá variar en función de cuál sea el motivo que origina el fallo. En definitiva, trabajar con todos los diversos tipos de problemas tiene un efecto de potenciación de la competencia curricular: recoge todas las situaciones que pueden ser modelizadas y cubre por ejemplo la etapa anterior a la representada por los problemas de dos etapas.

En segundo lugar, va a permitir un adecuado nivel de entrenamiento en cada una de las situaciones que son representadas en este tipo de problemas. Este entrenamiento, además, conocido el grado de dificultad de cada operación, se podrá hacer de la forma más adecuada y adaptada a la dificultad. A veces, detras de un problema mal resuelto sólo hay una falta de ejercicio. ISUS (1988:266) lo pone de manifiesto después de analizar la respuesta de más de seis mil alumnos a quince problemas tipo: "Una variable no categorizada, pero presente en el análisis efectuado, es la ejercitación. Cierto número de textos narrativos sencillos, expuestos al inicio del programa, tienen muy bajo porcentaje de resolución. Analizadas las posibles variables, todo parece indicar que éstas no causan dificultad notable, sino que es la falta de entrenamiento o práctica en resolver problemas verbales lo que influye".

Trabajar con todos los problemas verbales de una etapa correspondientes a todos los tipos obliga a una secuenciación de los mismos. Esta secuenciación sí es algo de gran importancia para el proceso didáctico, puesto que supone una reflexión sobre la dificultad de cada problema, un escalonamiento medido de estas dificultades y, también, el establecimiento de una línea de progresión sin saltos ni soluciones de continuidad que va a permitir un tránsito fluido y unos retornos, si se producen, justificados y correctores de situaciones no superadas. Con palabras muy precisas subrayan NESHER, GREENO y RILEY (1982: 393) la utilidad de esta secuencia, que "facilita la comprensión de las estructuras de conocimiento que son previamente exigidas para resolver ciertos problemas", y, además, "permite adaptar diferentes estrategias de enseñanza de acuerdo con los diversos niveles".

Los mismos autores introducen una razón más: analizar las diversas y diferentes dificultades que presentan los PAEVs empieza a poner de manifiesto las dificultades que tienen los alumnos a la hora de resolver tales problemas: "Este análisis conduce a una mejor comprensión de las dificultades que los niños encuentran en los diferentes niveles de rendimiento" (NESHER, GREENO y RILEY, 1982:393).

Por último, los PAEVs, sus enunciados, pueden también convertirse en el lugar y el instrumento a partir del cual conocer mejor la mente de los niños, sus conceptos previos, sus interpretaciones erróneas de la realidad. BELL, FISCHBEIN y GREER (1984:146) ya expresaban esta vertiente de la explotación didáctica de los PAEVs, abundando en "la provocación y discusión de conflictos, en las concepciones erróneas y en los obstáculos psicológicos que los alumnos tienen".

LOS PAEVS Y LA INVESTIGACION CIENTIFICO-EDUCATIVA.

Para este apartado hay que suscribir las aportaciones que hace MOSER (1982:135-136). En primer lugar, el dominio de los PAEVs es suficientemente simple como para que las diferencias entre los diversos tipos y categorías de problemas puedan ser establecidas con "razonable grado de claridad" (IBIDEM). En segundo lugar, su simplicidad no es obstáculo para que presente una variedad de categorías y de tipos. Estas categorías y tipos generan a su vez diversas estrategias de solución, conforman característicos errores, establecen gradientes de dificultad. En tercer lugar, las respuestas y los procesos de solución que dan los alumnos son a la vez lo bastante sencillos como para permitir "alguna esperanza de comprensión y modelación" (IBIDEM), y lo bastante complejos para provocar el interés. En cuarto lugar, porque las operaciones elementales que ayudan a conceptualizar y modelizar ocupan un lugar central en el curriculum matemático y se desarrollan a lo largo de un gran período de tiempo: su seguimiento y estudio permiten dar cuenta de los diversos estadios de progreso por los que pasa la mente del alumno en la apropiación de los conceptos que soportan estas estructuras.

ALGUNAS INDICACIONES PARA EL TRATAMIENTO DE LOS PAEVS EN EL AULA.

La primera implicación para el profesor es la toma de conciencia de que la enseñanza-aprendizaje de los problemas aritméticos elementales, pese a lo que se pudiera pensar en un primer momento, es una tarea difícil. El profesor debe ser precavido ante los PAEVs y pensar que se encuentra ante un contenido de gran complejidad y alejado de la simpleza de que se suele revestir o con que suele ser considerado. Una forma demasiado sencilla de contemplar la dificultad de los problemas suele identificarlos por la aparatosidad o el nivel de los conceptos que emplee. Así, está muy establecido pensar que los problemas de una operación son más sencillos que los de dos operaciones, que los que afectan a números naturales son más sencillos que los que afectan a enteros, etc. Parece que, en lo que concierne a los problemas de una operación tal cosa no es así, y existen tipos de problemas de esta especie que incluso son difíciles para alumnos de doce años que, de acuerdo con el razonamiento que ahora se critica, deberían haberlos superado hacía tiempo. Por consiguiente, y de cara a la actuación del profesor, ante este tipo de problemas debe haber cautela y precaución. Es un contenido complejo, que se debe desarrollar a lo largo de diversos cursos académicos, que el dominio del mismo tiene trascendencia para otros aprendizajes posteriores, que suponen un lugar de ejercitación e intersección de destrezas variadas. No deben constituir, por tanto, en la vida de las aulas un trámite leve que acompañe por poco tiempo al aprendizaje de las operaciones elementales.

También hay que decir algo respecto a la conexión entre la comprensión lectora del alumno y su capacidad de resolución de PAEVs. Los profesores debe trabajar la comprensión lectora del párrafo del problema de manera específica y diferente respecto a la forma tradicional de trabajarla con textos de lectura largos. Hay diferencias de grado en ambos tipos de comprensión, y normalmente las exigencias de comprensión del sentido del párrafo exigen mayores capacidades que las que requiere el texto largo. De ahí la necesidad de un entrenamiento específico, que busque e indague por encima del sentido aparente, que se detenga en la articulación de sintagmas y frases, en las relaciones particulares entre los términos que pueden llegar a cambiar o matizar el significado, etc. Las prácticas corrientes de los alumnos en comprensión lectora van más por la captación del sentido general de un texto o, en todo caso, por la construcción del sentido derivada de la relación entre los diversos párrafos, que por la articulación y relación de las diversas palabras, sintagmas y oraciones que componen un párrafo con respecto a su sentido global y a su significado operativo. La inadecuación de la práctica escolar puede venir por tener diverso nivel de exigencias el texto de entrenamiento lector ordinario que emplea el alumno que el texto que alberga el enunciado del problema.

QUEDA MUCHO POR GRADUAR EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LOS PAEVS.

Una precaución general debe tener siempre presente el docente: cuando el alumno aborde la solución de un problema se debe estar seguro de que conoce el contexto en que el problema se plantea. Hay que estar atentos a que la situación que modeliza el problema sea entendida correctamente por el alumno. A veces, las dificultades no provienen de la falta de conexión del conocimiento aritmético con la situación en que se debe aplicar, sino que están instaladas antes (véase, p.e., DELVAL y ECHEITA, 1991). Hay que estar muy atentos a que la situación se comprenda y que además sea reflejada con términos usuales en el lenguaje infantil. Términos y conceptos muy frecuentes en el lenguaje empleado en clase para presentar problemas ("producto", "objeto", "travesía", "importe de la venta", "a 6 duros la unidad", promedio por semana", "furgón depósito", "vestimenta", etc) se convierten en obstáculos insalvables para los alumnos debido a que son completamente ajenos a su experiencia. Por tanto, exponer a los alumnos situaciones familiares a través de un lenguaje usual puede ser una forma efectiva de ponerlo en las mejores condiciones de abordar la tarea con éxito.

Respecto a la experiencia que traen los alumnos a la clase, puede ocurrir que les sean propuestos PAEVs que respondan a experiencias muy habituales a los niños. Es también frecuente que no aparezcan PAEVs que se ocupen de situaciones que también formen parte del acervo experiencial de los alumnos. Finalmente, hay un abanico de situaciones ajenas a la experiencia del alumno y que tampoco aparecen reflejadas en los problemas escolares. Dada esta situación, una primera tarea para el profesor debe ser ofertar tipos de PAEVs que exploten aspectos de la experiencia infantil no recogidos en las colecciones estándar de problemas. Pero también es muy importante, y aquí está la implicación que se quiere destacar, que se creen en la clase las situaciones ajenas a la experiencia de los alumnos y que más tarde debe ser presentadas en contextos de problemas aritméticos. Todas las situaciones no usuales de **cambio**, de **comparación**, de **igualación**, las situaciones de comparación multiplicativa, de cuoticiones, etc., son susceptibles de ser desarrolladas, interpretadas y solucionadas a nivel experiencial por parte del alumno, y éste primer paso es fundamental para que luego pueda matematizarlas (MARTINEZ MONTERO, 1995).

Lo que se acaba de señalar debe llevar al profesor a otro convencimiento: la necesidad del empleo de ayudas, de materiales diversos, a la hora de resolver los PAEVs. Hay bastantes evidencias de que la presencia de ayudas disminuye las dificultades y eleva el porcentaje de resolución. Inclusive sin manipular tales ayudas, con su simple contemplación (BUCKINGHAM y MACLATCHY, 1930; GIBB, 1965). En la etapa numérica, los trabajos de CARPENTER ET AL (1983), CARPENTER y MOSER (1981) y STEFFE y JOHNSON (1971) muestran estos beneficios, que se incrementan notablemente en la etapa prenumérica o en ausencia de escolarización previa. Los trabajos de

RILEY (1979) y STEFFE, THOMPSON y RICHARDS (1982) muestran la mayor eficiencia de los alumnos con presencia y utilización de ayudas. Las ayudas materiales son, para estos alumnos, lo mismo que las tablas para el que se inicia en estadística: un soporte imprescindible. Gracias a las ayudas el alumno tiene posibilidades de recrear la situación, de volver a vivirla, y, por tanto, de entender el problema. A veces no basta con que el alumno haya vivido la situación, la experiencia concreta. Debe rememorarla de forma efectiva, y para ello puede ser muy necesaria la ayuda de materiales concretos. Y no es sólo que gracias a las ayudas el niño resuelva mejor los problemas; también éstas tienen gran utilidad pra el profesor. Las ideas previas que va a reflejar el niño en la forma de disponer los materiales, de usarlos, de manipularlos, se constituyen en indicios muy valiosos para que el profesor entienda cómo discurre el pensamiento de su discípulo.

Hay que graduar y ser muy cuidadosos con los modelos que se muestren a los niños para las diversas situaciones que modelizan los PAEVs, buscando el máximo de especificidad. Esta especificidad de modelos implica diferenciaciones claras según sea la categoría semántica. El típico ejemplo de ver cuál es la diferencia comparando dos regletas de Cuisenaire (por ejemplo, una de color rosa y otra de color naranja) sólo tiene sentido en la categoría de **comparación** o, según se formule, en la de **igualación**, pero en absoluto es aplicable a las sustracciones que soportan situaciones de **cambio** o de **combinación.** La recta numérica tampoco es un modelo adecuado para estas últimas categorías, por las mismas razones que se acaban de exponer.

El profesor debe cuidar también la historia, el relato que contiene el problema que se presenta al alumno. También este relato es susceptible de ser efectuado de una manera u otra y, por consiguiente, de evocar mejor la situación a la que el alumno debe referirlo. Compárense por ejemplo los dos textos que siguen:

i) "Al vestuario del gimnasio entran 12 niños. Allí hay 9 camisetas. ¿Cuántas camisetas hay menos que niños?"

ii) "Al vestuario del gimnasio entra 12 niños. Allí hay 9 camisetas. ¿Cuántos niños se van a quedar sin camiseta?"

Es evidente que ambos textos reflejan un problema que es el tipo 2 de la categoría semántica de **comparación.** La estructura, los datos, el contexto, etc., son los mismos. Sin embargo, el segundo problema es mucho más sencillo para el alumno al tener menos dificultades para procesar los textos en que vienen expresados los problemas. STERN (1993: 9) indica que "...lo que hace a los problemas de Comparación tan difíciles tiene más que ver con el procesamiento del texto que con el conocimiento matemático". Los trabajos de HUDSON (1983) Y DAVIS-DORSEY ET AL (1991) aportaron evidencia experimental suficiente en este sentido.

Se está incidiendo en la necesidad de graduar, de ir ofreciendo niveles de dificultad progresivos. En todo lo dicho en este apartado se ha abundado en lo mismo: que el niño haya vivido la situación o experiencia que tipifica el problema, que tenga los medios que le permita recrearla, que la redacción del texto se la recuerde de la forma más vívida y acorde a sus intereses. Esta graduación, esta necesidad de progresividad tiene que manifestarse en más sectores: el tamaño de los números, la situación de la incógnita y la forma de presentar el algoritmo y, finalmente, el orden de aparición de los datos.

EL TAMAÑO DE LOS NUMEROS.

Hay una diferencia notable en los rendimientos que alcanzan los alumnos en resolución de PAEVs cuando un problema es planteado con números muy pequeños o con números con los que el alumno no tuviera más remedio que emplear las operaciones. Esta cuestión tuvo un cultivo temprano (KNIGHT y BEHRENS, 1928) al hilo de las investigaciones por el aprendizaje de los hechos básicos, que establecen que el problema es más difícil cuanto mayor sea el resultado. A este respecto, se puede consultar a ASCHRAFT, (1982, 1983); BAROODY (1988); GROEN y PARKMAN (1972); GROEN y POLL (1973); SUPPES y GROEN (1967); SVENSON (1975); SVENSO y BROQUIST (1975); MARTINEZ MONTERO (1995). Incluso las estrategias que pongan en juego los niños pueden estar influenciadas por el tamaño de los sumandos (SIEGLER y ROBINSON, 1982), VERGNAUD (1991: 174-175). La diferencia notable era, naturalmente, a favor de los problemas presentados con números muy pequeños. Pero las implicaciones concernientes al empleo de los números van más allá de la constatación de que un alumno resuelve mejor un problema si viene con números pequeños que si viene con números grandes. Este es un hecho establecido que aquí se reafirma. Además, el empleo de números muy pequeños puede dar pistas suficientes a los alumnos para descubrir cuál es la operación que resuelve el problema. Así, por ejemplo, un problema de **cambio 4** se puede plantear con el siguiente texto: "Tenía 6 canicas. Después de jugar me quedan 4 canicas. ¿Cuántas canicas perdí?". El alumno da, en condiciones normales, instantáneamente la solución: 2 canicas. Con estos tres números, puestos en el orden correspondiente, se le puede hacer reflexionar al alumno sobre la operación que ha empleado: 6-4=2. Rápidamente percibe que se trata de una sustracción, y ante un problema similar a cuyo resultado no es capaz de llegar por subitización aplica la misma operación que, de manera inconsciente, ha empleado cuando los números era muy pequeños. Junto a lo anterior, es muy estimable el aprovechamiento didáctico que puede hacer el profesor de la comparación de los datos de resolución de problemas presentados con números grandes o con números pequeños. No se va a insistir en ello; baste repetir que la conjugación de ambos niveles de resolución se convierte en un indicador estimable de la aprensión del concepto que representa el PAEV por parte de los alumnos.

Es interesante también la graduación del tamaño de los números. Es mejor emplear números pequeños o muy pequeños junto a números grandes que sólo utilizar éstos últimos. Pero es mucho mejor que haya transición de unos números a otros. Pasar de números pequeños a números grandes se puede hacer a través de las decenas, centenas o unidades de millar, etc., exactas, esto es, sin otro tipo de unidades. Al alumno que supo resolver el problema anterior ("Tenía 6 canicas. después de jugar me quedan 4 canicas. ¿Cuántas canicas perdí?") no le es especialmente difícil resolverlo cuando aparecen estas otras cantidades: 60 y 40 (ya no serían, claro, canicas), 600 ó 400 ó, finalmente, 60.000 y 40.000. Un elemento intermedio entre estas cantidades y las que tienen representación de los diversos órdenes puede ser la presentación de una de las cantidades (la que haga de sustraendo) con sólo el primer orden de unidades presentes. Como ejemplo de lo que se quiere decir, obsérvese la progresión de los siguientes problemas de **cambio 5**:

i) Me han dado 4 pesetas. Ahora tengo 6 ¿Cuántas pesetas tenía antes de que me dieran nada?

ii) Me han dado 40 pesetas. Ahora tengo 60. ¿Cuántas pesetas tenía antes de que me dieran nada?.

iii) Me han dado 400 pesetas. Ahora tengo 600. ¿Cuántas pesetas tenía antes de que me dieran nada?.

iv) Me han dado 400 pesetas. Ahora tengo 658. ¿Cuántas pesetas tenía antes de que me dieran nada?.

v) Me han dado 427 pesetas. Ahora tengo 658. ¿Cuántas pesetas tenía antes de que me dieran nada?.

OTROS ASPECTOS.

Suele haber correspondencia en la forma de tratar las ecuaciones numéricas y los tipos de PAEVs que aparecen en los libros de texto y los cuadernos de trabajo. Así, a ecuaciones del tipo "a + b= ?" corresponden problemas de **combinación 1** o **cambio 1.** A expresiones del tipo " a - b = ?" corresponden problemas de **cambio 2** o de **comparación 2.** El instruir a los alumnos en tipos diferentes a los señalados implica necesariamente que se trabaje con ecuaciones numéricas que se aparten del canon clásico. Un problema de **cambio 6** va a ser más sencillo para un alumno que conoce y sabe resolver ecuaciones numéricas del siguiente tenor: " ? - b = c". Se trata, en definitiva, de ser coherentes con los planteamientos y de ser fieles al principio de que toda situación nueva venga a apoyarse en una experiencia anterior. Del mismo modo que la situación reflejada por el PAEV debe pertenecer al ámbito de la experiencia del resolutor y debe permitir que el alumno reconstruya e identifique tal situación de forma eficaz, también la experiencia previa en el uso de los algoritmos y de sus diversas formulaciones debe ser un referente necesariamente poseído por el alumno. Es posible también plantearse la cuestión de si se debe introducir la ecuación no canónica como consecuencia de la resolución de problemas que la exijan o si este conocimiento debe preceder al anterior. Aquí se mantiene esta última postura (primero la ecuación, luego el problema) por atenerse a una situación realista: el alumno puede llevar años trabajando con los algoritmos antes de enfrentarse a este tipo de problemas.

Una última consideración se quiere hacer sobre los datos del problema. La secuencia de los datos conocidos, el orden en que éstos aparecen, no juegan un papel neutro para el alumno que va a resolver esa tarea. Los problemas se pueden tornar más difíciles si el orden en que aparecen los datos es el inverso o distinto a aquél en que son requeridos para efectuar el cálculo. DE CORTE ET AL (1985: 461-462) señalan que "la estrategia utilizada por los niños para resolver problemas elementales de suma y resta no sólo depende de la estructura semántica de la tarea, sino también de la secuencia de elementos dados en el texto del problema". También VERGNAUD (1991: 175-176) insiste en este aspecto y lo completa. No sólo es que las informaciones estén ordenadas" ...conforme al desarrollo temporal de hechos contados o, al contrario, proporcionadas en desorden o en un orden inverso". En puridad, el diverso grado de dificultad que se plantea en cada uno de los tipos de problemas dentro de cada categoría semántica viene derivado de la alteración del orden canónico de los datos que forman la ecuación o sentencia que subyace en el problema.

REFERENCIAS.

ASCHRAFT, M. (1982). "The development of mental arithmetic: A chronometric approach". *Deveelopmental Review*, 2. Pp. 213-236.

ASCHRAFT, M. (1983). "Procedural knowledge versus fact retrieval in mental arithmetic: A reply to Baroody". *Developmental Review*, 3. Pp. 231-235.

BAROODY, A.J. (1988). *El pensamiento matemático de los niños.* Madrid. MEC-Visor.

BELL, A.G., FISCHBEIN, E. y GREER, G. (1984). "Choice of Operation in Verbal Arithmetic Problems: The Effects of Number Size, Problem Structure and Context". *Educational Studies in Mathematics*, 15 Pp. 129-148.

BELL, W., COSTELLO, J., y KUCHEMAN, D. (1983). *A review of research in Mathematical Education. Research on Learning and Teaching.* Windsor. NFER-Nelson.

BERMEJO, V. (1985). "Estudio evolutivo de las conductas de clasificación en el niño. Aspectos lingüísticos y perceptivos". *Infancia y Aprendizaje*, 31-32. Pp. 211-227.

BERMEJO, V., y RODRIGUEZ, P. (1987). "Estructura semántica y estrategias infantiles en la solución de problemas verbales de adición". *Infancia y Aprendizaje*, 39-40. Pp. 71-81.

BUCKINGHAM, B.R., y MACLATCHY, J. (1930) "The number abilities of children when they enter grade one". En *29th Yearbook of the National Society for the Study of the Education.* Bloomington. Indiana. Public School Publishing.

CARPENTER, T.P., y MOSER, J.M. (1981). " The development of Additon and Substraction Problems-Solving Skills". En CARPENTER, T.P., MOSER, J.M., y ROMBERG, T.A. (Eds.) *Addition and Substration: A congnitive perspective.* Hillsdale, New Jersey. L. Erlbaum Associates.

CARPENTER , T.P., HIEBERT, J., y MOSER, J.M. (1983). "The Effect of Instruction on Children's Solutions of Adition and Substraction Word Problems". *Educational Studies in Mathematics*, 14. Pp. 55-72.

CASE, R. (1988). "Summary Comments: Developing a Research Agenda for Mathematics in the Middle Grades". En HIEBERT, J., y BEHR, M. (Eds.). *Number Conceps and Operations in the Middle Grades.* Reston Virginia. L. Erlbaum A. Vol. 2. Pp. 265-269.

CASTRO MARTINEZ, E., RICO, L. y GIL, F. (1992). "Enfoques de investigación en problemas verbales aritméticos aditivos". *Enseñanza de las Ciencias*, 10, 3. Pp. 243-253.

DAVIS-DORSEY, J., ROSS, S.M., y MORRISON, G.R. (1991). "The role of rewording and context personalization in the solving of mathematical word problems". *Journal of Educational Psychology*, 83. Pp. 61-68.

DE CORTE, E., y VERSCHAFFEL, L. (1987). "The Effect of Semantic Structure on First-Graders' Strategies for solving Addition and Substration Word problems". *Journal for Research in Mathematics Education*, 18, 363-381.

DE CORTE, E., VERSCHAFFEL, L., y DE WIN. (1985). "Influence of Rewording Verbal Problems on Children's Problem Representations and Solutions". *Journal of Educational Psychology*, 77, 4. Pp. 460-470.

DELVAL, J. y ECHEITA, G. (1991). "La compresión en el niño del mecanismo de intercambio económico y el problema de la ganancia". *Infancia y Aprendizaje*, 54. Pp. 71-108.

FISCHBEIN, E., DERI, M., NELLO, M.S., Y MARINO, M.S. (1985). "The Role of Implicit Models in Solving Verbal Problems in Multiplication and Division". *Journal for Research in Mathematics Education*, 16. Pp. 3-17.

FORD, M. (1990). "The Writing Process: a Strategy for Problems Solvers". *Arithmetic Teacher*, 38-3. Pp. 35-38.

FUSON, K. (1992). "Research on whole number addition and substraction". En *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York. D.A. Grouws. McMillan. Pp. 243-275.

GIBB, E. (1965). "Children's thinking in the process of subtraction". *Journal of Experimental Education.* 25. Pp. 71-80.

GREER, B. (1992). "Multiplication and Division as models of Situation". En *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York. D.A. Grouws. McMillan. Pp. 276-295.

GROEN, G., y PARKMAN, J. (1972). "A chronometric analysis of simple addition". *Psychological Review,* 79. Pp. 329-343.

GROEN, G., y POLL, M. (1973). "Subtraction and the solution of open sentence problems". *Journal of Experimental Child Psychology,* 16. Pp. 292-302.

HUDSON, T. (1983). "Correspondences and numerical differences between disjoint sets". *Child Development,* 54. Pp. 84-90.

ISUS, S. (1988). "Orientaciones curriculares en la resolución de problemas aritméticos verbales". En VV.AA. *Temas actuales sobre Psicopedagogía y Didáctica.* Madrid. Narcea. Pp. 261-266.

KNIGHT, F., y BEHRENS, M. (1928). *The learning of the 100 addition combination and the 100 susbtraction combination.* Nueva York. Longmans, Green and Co.

LINDQUIST, M.M. (1989). "It's Time to Change". En TRAFTON, P.R., y SHULTE, A.P. (Eds.) (1989). *New Directions for Elementary School mathematics.* Yearbook. Reston. Virginia. N.C.T.M. Pp. 1-13.

LUKE, C. (1988). "The Repeate Addition Model of Multiplication and Children's Performance on Mathematical Word Problems". *Journal of Mathematical Behavior,* 7. Pp. 217-226.

MARTINEZ MONTERO, J. (1991). *Numeración y operaciones básicas en la educación primaria.* Madrid. Escuela Española.

MARTINEZ MONTERO, J. (1995). *Los problemas aritméticos elementales verbales de una etapa, desde el punto de vista de las categorías semánticas, en los cursos 3º, 4º y 5º de EGB/Primaria.* Tesis doctoral.

MOSER, J.M. (1982). "The emergence of algorithmic problem solving behavior". *Recherches en Didactique des mathématiques.* Vol 3, nº 1. Pp. 135-156.

NESHER, P. (1980). "The Stereotyped Nature of School Word Problems". *Four the Learning of Mathematics,* 1. Pp. 41-48.

NESHER, P., GREENO, J.G., y RILEY, M.S. (1982). "The Development of Semantic Categories for Addition and Substraction". *Educational Studies in Mathematics*, 13, 373-394.

POIRIER, L. (1991). "Etude des Modéles Implicites mis en Oeuvre par les Enfants lors de la Résolution de Problémes Complexes Mettant en Jeu une Reconstruction d'une Transformation Arithmétique" *P.M.E.* 15, Vol III.

PUIG, L., y CERDAN, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares.* Madrid. Síntesis.

RILEY, M.S. (1979). "The development of children;s ability to solve arthmetic word problems". Informe presentado a la Reunión Anual de la Asociación Americana de Investigación Educativa. San Francisco.

ROMBERG, T.A., CARPENTER, T.P. (1986). "Research on Teaching and Learning Mathematics: Two Disciplines of Scientific Inquiry". En WITTROCK, M.E. (Ed.). *Handbook of Research on Teaching.* New York. McMillan. Pp. 850 a 873.

SIEGLER, r., y ROBINSON, M. (1982). "The development of numerical understanding". En REESE, H., y LIPSITT, L. (Eds.). *Advances in Child development and behavior.* Nueva York. Academic Press.

STEFFE, L.P., y JOHNSON, D.C. (1971). "Problem solving performance of first-grade children". *Journal for Researchs in Mathematics Education,* 2. Pp. 50-64.

STEFFE, L.P., THOMPSON, P, y RICHARDS, J. (1982). "Children's counting in arithmetical problem solving". En CARPENTER, T.P., MOSER, J.M. y ROMBERG, T.a. (Eds.) (1982). *Addition and Substraction: A cognitive perspective.* Hillsdale, New Jersey. L. Erlbaum Associates.

STERN, E. (1993). "What Makes Certain Arithmetic Word Problems Involving the Comparison of Sets So difficult for Children?". *Journal of Educational Psychology,* 85, 1. Pp. 7-23.

SUPPES, P., y GROEN, G. (1967). "Some counting models for first grade performance data on simple addition facts". En SCANDURA, J.M. (Ed.). *Research in Mathematics Education.* Washington, D.C. N.C.T.M.

SVENSON, O. (1975). "Analysis of time requiered by children for simple additions". *Acta Psychologica,* 39. Pp. 289-302.

SVENSON, O., y BROQUIST, S. (1975). "Strategies for solving simple additions problems". *Scandinavian Journal of Psychology,* 16. Pp. 143-151.

VERGNAUD, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad.* México, D.F. Trillas.

RESUMEN

Este informe consta de dos partes. La primera se ocupa del valor educativo de los problemas aritméticos verbales desde el punto de vista didáctico, de la educación matemática y de la investigación educativo-científica. La segunda parte refleja algunas implicaciones que para el proceso de enseñanza-aprendizaje de los mismos aparecen como relevantes: la conexión de los contextos con las ideas previas del alumno, la especificidad de los procesos de comprensión lectora, el empleo de ayudas y la especificidad de las mismas, la composición orientada a la facilitación del procesamiento, el tamaño de los números, el tratamiento de la ecuación numérica y el orden de aparición de los datos.

SUMMARY

This piece of work can be divided into two sections. The first section analyses the basic oral arithmetic problems from an educational point of view, the teaching of Mathematics and the educational/scientific investigation. The second section deals with smo of the relevant implications of the teaching-learnign processes: the connection betwen contexts and original ideas of the child, the specificity of the reading comprehension processes, the use of support and specificity in these processes, the composition directe towards the facilitation of the processing of data, the size of the numbers, the treatmet of the numerical equation and the order of appearance of data.

RÉSUMÉ

Ce rapport se compose de deux parties. Dans la première, l'auteur analyse la valeur des problèmes verbaux élémentaires d'arithmètique du point de vue didactique, de l'èducation mathèmatique et de la recherche éductive-scientifique. Au cours de la seconde partie, l'on expose quelques implications que, pour le processus d'enseignement et apprentisage e ce type de problèmes, semblent etre remarquables: la connexion des contextes des problèmes avec les idèes prèalables de l'élève; la spécificite des processus de comprèhension de la lecture; l'emploi d'aides et la specificitè de calles-ci; la composition de problèmes orientée vers la facilitation du traitement de l;information de l'élève; la grandeur des quantités; le traitemente de l'équation numérique et l'ordre d'apparition des donnés.