La habilidad de contar en el aprendizaje de la numeración.

Manuel Aguilar Villagrán

Universidad de Cádiz. Facultad de Ciencias de la Educación. Campus Universitario de Puerto Real. Polígono Río San Pedro, 11510 Puerto Real. Cádiz. Tfno. (956) 834300/834200. Fax (956) 835163.

(Recibido Septiembre 1997; aceptado Diciembre 1997).

Biblid (0214-137X (1957) 14; 23-44)

Resumen

Este artículo hace una revisión de los conocimientos que sobre el número y el conteo aporta la Psicología y las implicaciones prácticas que de ello resultan. Hacemos un repaso de la teoría clásica de la Escuela de Ginebra, considerando los aspectos críticos de esta posición y su propuesta general de intervención sobre las habilidades numéricas; a continuación planteamos la visión de Gelman y colaboradores que enfatiza la importancia de contar como proceso innatamente guiado y clave en el aprendizaje del número. Por último, mencionamos algunas actividades prácticas desde esta nueva perspectiva que podrían incidir en los procesos de enseñanza- aprendizaje del número.

Palabras clave: número, conteo, principios del conteo, aprendizaje

Abstract

The present article makes a review of the knowledge which Psychology provides to number and count skills and the practical implications resulting from it. We have revised the clasical theory of the School of Geneve, considering the critical aspects of this position as well as their general proposal of intervention on the numeric skills; later on this study, we have questioned the vision put forward by Gelman and his collaborators wich stresses the importance of counting as an innately monitored process and essential in the learning of numbers. Finally, we have mentioned some new practical activities which could affect the teaching-learning of numbers.

Key words: number, count skill, count principles, learning

Résumé:

Cet article propose une révision des connaissances sur le chiffre et le comptage apportées par la Psychologie et les implications pratiques qui en résultent. Nous faisons le point sur la théorie classique de l'École de Génève, en considérant les aspects critiques de cette position et sa proposition générale d'intervention sur les habiletés numériques. Nous exposons par la suite le point de vue de Gelman et de ser collaborateurs qui insistent sur l'importance de compter comme processus guidé de manière innée et clé de l'apprentissage du chiffre. Finalement, nous faisons mention de quelques activités pratiques à partir de cette nouvelle perspective qui pourraient agir dans les processus d'enseignement-apprentissage du chiffre.

Mots clés: chiffre, calcul, principes du comptage, apprentissage

Sumario:

1. Introducción

El desarrollo de las habilidades numéricas en los niños es un área fascinante, tanto por la cantidad de tiempo de educación formal y reglada que se emplea para enseñar numeración, como por las enormes aplicaciones que tiene en nuestras vidas. Los niños han de entender los números si se quiere que tengan sentido para ellos los distintos modos en que se usan en la vida cotidiana: cuantificar, identificar lugares, identificar un objeto en concreto dentro de un conjunto, denominar y medir. También el conocimiento del valor posicional va a ser crucial para el trabajo posterior con números y operaciones. (NCTM, 1990)

El mismo documento anterior considera que un niño tiene un buen sentido numérico cuando: 1. entiende correctamente los significados de los números, 2. ha desarrollado relaciones múltiples entre los números, 3. reconoce las magnitudes relativas de los números, 4. conoce el efecto relativo de las operaciones numéricas, y 5. desarrolla puntos de referencia para sus mediciones de objetos comunes y de situaciones de su entorno. Este entendimiento es, lógicamente, gradual, pero sus bases y desarrollo empiezan bastante antes de lo que se pensaba (Antell y Keating, 1983).

En este artículo pretendemos hacer una revisión de los conocimientos actuales que aporta la Psicología del Desarrollo y las implicaciones prácticas que de ello resultan. En primer lugar hacemos un repaso de la teoría clásica de la Escuela de Ginebra, consideramos los aspectos críticos de esta posición y su propuesta general de trabajo; seguidamente planteamos la visión de Gelman y colaboradores que enfatiza la importancia de contar como proceso innatamente guiado y clave en el aprendizaje de las habilidades numéricas. Por último, mencionamos algunas de las implicaciones prácticas de esta nueva perspectiva en el aprendizaje de las habilidades numéricas.

2. El número y la teoría piagetiana

Desde que el trabajo pionero de Piaget y Szeminska (1941, 1982) describiera la génesis y aparición del número en el niño, han sido cientos los trabajos de investigación que sobre el aprendizaje numérico se han realizado.

Para Piaget el desarrollo de la competencia numérica del niño se relaciona fundamentalmente con el desarrollo de su capacidad lógica. Todos los aspectos del número forman parte del desarrollo cognitivo de dominio general y se construye como resultado de la inteligencia sensoriomotriz general y la posterior coordinación de la seriación y clasificación. De modo que los números presentarían tres propiedades:

a) Abstracción de las cualidades, de manera que todos los objetos son equivalentes (1=1=1).

b) Ordenación, a fin de poder diferenciar entre sí los objetos equivalentes. Esta habilidad implica la coordinación de relaciones, pues los objetos se ordenan o jerarquizan con base en alguna dimensión, por ejemplo, el peso, la longitud, el tamaño, etc.

c) También es necesario un sistema de clasificación jerárquica de relaciones inclusivas, en el cual la clase que contiene un solo elemento está incluida en la clase que contiene dos elementos, a su vez ésta está incluida en el que contiene tres, etc., etc., de manera que, por ejemplo, 1 está incluido en: (1 mas 1 mas 1), etc.

Desde este enfoque de la Escuela de Ginebra, la comprensión del número requiere dos conceptos fundamentales: la conservación y la correspondencia uno-a-uno. En cuanto a la primera, el número es inteligible en la medida en que permanece idéntico a sí mismo, se conserva. Igualmente, la correspondencia no sólo constituye una de las fuentes del número, sino que además es el procedimiento más simple para determinar la equivalencia de los conjuntos (en la correspondencia uno a uno se ponen por parejas dos o más grupos de objetos, uno a uno y se hacen corresponder para comprobar si hay el mismo número en un grupo que en otro).

Los procedimientos empíricos utilizados para evaluar el desarrollo de estos conceptos en la teoría piagetina son:

- Prueba de conservación numérica (conservación de cantidades discretas): cuando dos filas o hileras de fichas se encuentran en correspondencia uno a uno, el adulto separa las fichas de una de las filas y le pide al niño que compare las cantidades correspondientes. Los niños antes de los cinco- siete años creen que la fila más larga tiene más fichas que la que no ha sufrido transformación alguna; no caen en la cuenta del truco perceptivo producido por la separación de las fichas. En la prueba de correspondencia uno a uno se ponen por parejas dos o más grupos de objetos, uno a uno. Si, por ejemplo, una persona tiene un montón de naranjas y un montón de manzanas, y si pone una naranja con cada manzana, está poniendo las manzanas y naranjas en correspondencia uno a uno; si termina de poner por parejas los dos grupos y no quedan ni manzanas ni naranjas, entonces la ordenación uno a uno muestra que existe el mismo número de manzanas y naranjas.

- Prueba de seriación; por ejemplo, de longitudes: el niño debe colocar unas varillas en orden de longitud creciente, formando una "escalera".

- La prueba de inclusión de clases es como sigue: en una situación de reunión de dos conjuntos, se le pide al niño que compare el todo con una de las partes; en un ramo que contenga margaritas y rosas, por ejemplo, ¿hay más flores o más margaritas?

Para Piaget, un niño que realiza correctamente una de las pruebas anteriores también hace bien las otras: hay una sincronía entre la conservación de las cantidades discretas, la seriación y la inclusión de clases. Además, el éxito que se observa entre los seis y ocho años en cada prueba es operatorio, es decir, de naturaleza lógica.

En general, se encuentra que los niños pequeños fracasan tanto en la situación de conservación, seriación e inclusión de clases como en la de correspondencia uno-a-uno, apreciándose una evolución paralela en estas nociones en función de la edad, con tres etapas diferentes.

La primera, que se extiende hasta los cinco años, se caracteriza por la ausencia de comprensión de estas nociones. Por ejemplo, los niños consideran que los cambios perceptivos conllevan un cambio cuantitativo porque se centran en una de las dos dimensiones: longitud o densidad. En el caso de la correspondencia uno-a-uno, por ejemplo, realizan una correspondencia global basada en la percepción de la longitud de las hileras -e ignorando, por tanto, la densidad de las mismas-, de modo que suponen que si las hileras son de la misma longitud contendrán entonces el mismo número de elementos, mientras que si la longitud es diferente, el número de elementos será igualmente diferente.

La segunda etapa abarcaría desde los cinco a los seis años y medio o siete. Se trata de una etapa de transición, mal definida y difícilmente identificable desde una óptica estructuralista, por la que no tienen que pasar necesariamente todos los niños. Se caracteriza principalmente por la presencia de respuestas intermedias consistentes en responder correctamente cuando las diferencias entre los dos conjuntos son poco pronunciadas, y en hacerlo incorrectamente cuando se acentúan tales diferencias. De manera similar, en las correspondencias los niños son capaces de construir correspondencias visuales, pero la equivalencia entre ambas colecciones no es duradera, ya que desaparece al espaciar, por ejemplo, los elementos de una de ellas.

La tercera y última etapa se manifiesta a partir de los seis años y medio o siete, cuando el niño admite sin dudarlo (y afirma con necesidad lógica) tanto la conservación como la equivalencia con independencia de la situación experimental. Una vez establecida la equivalencia entre dos conjuntos las transformaciones perceptivas no afectan a la cantidad y, por tanto, tampoco a la equivalencia inicial (un desarrollo más detallado de estas etapas puede consultarse en Bermejo, 1990).

Otros autores detallan más estas etapas en el desarrollo de la conservación, es el caso de Linda Tollefsrud-Anderson (1987) que establece cuatro etapas: no conservación, conservación sin adecuada explicación, conservación con adecuada explicación tras ser preguntado por el experimentador y conservación con adecuada explicación sin ser preguntado.

Pero a partir de la segunda década de los setenta, las ideas piagetianas sobre el número empiezan a recibir criticas desde varios enfoques diferentes, que en síntesis se pueden resumir en dos:

A. Investigaciones que se han centrado en reducir la edad a la que se alcanza la conservación numérica y otras nociones piagetianas.

Donaldson (1978) abordó la tarea de conservación del número, sosteniendo que lo que pasaba es que el niño pequeño interpretaba erróneamente lo que le pedía el experimentador adulto, creyendo que sus respuestas tenían que centrarse en algún acto llamativo realizado por el experimentador como, por ejemplo, la acción de alargar una de las líneas de objetos cuando se separaban en las hileras. En el experimento original de McGarrigle y Donaldson (1975) la transformación espacial de una de las líneas de objetos se producía por accidente (por causa de un osito malo que salía de una caja y modificaba una de las líneas) en lugar de ser un acto intencional del experimentador. Con esta modificación, los niños conseguían resolver la tarea a una edad más temprana que en la versión típica de Piaget. Los niños, según McGarrigle, interpretan mal el problema según la formulación piagetiana. Por eso, Donaldson, llega a sostener que el desarrollo consiste en pasar del conocimiento incrustado en contextos pragmáticos relevantes al conocimiento liberado de esos contextos.

También Markman (1979) realizó una propuesta explicativa de los resultados de Piaget sobre la inclusión de clases. Estableció una distinción entre clases (soldados, árboles) y colecciones (un ejército, un bosque) y los términos lingüísticos que se codifican. Markman comprobó que a los niños pequeños les resulta más fácil conservar el número cuando los objetos de las líneas se nombran mediante un término que indique una colección ("¿Tiene tu ejército tantos como mi ejército?") que cuando se nombran con términos que se refieren a clases ("¿Tienes tantos soldados como yo?"). O en este otro ejemplo, "¿Quién daría una fiesta más grande, alguien que invite a los niños o alguien que invite a los alumnos?", la mayoría de los preescolares dicen incorrectamente "a los niños". Pero cuando se le pregunta: "¿Quién daría una fiesta más grande, alguien que invite a los niños o alguien que invite a la clase?", los preescolares responden correctamente diciendo "la clase".

En este tipo de investigación también fue notable la aportación de Bryant (1974). Partía de la hipótesis de que el problema del niño podría estar en que tenía que aprender a distinguir entre indicios perceptivos relevantes e irrelevantes para el número. En los experimentos que realizó, camuflando los aspectos perceptivos irrelevantes de la situación, la edad a la que se resuelve la tarea puede bajar. No obstante, hay que señalar que el número para Piaget no equivale a no hacer caso de la disposición espacial o reconocer que la configuración de dos presentaciones estáticas es irrelevante para el número. La conservación consiste en concentrarse específicamente sobre las transformaciones y razonar sobre ellas (se consigue por identidad, y por reversibilidad por inversión o reversibilidad por compensación)

B. Investigaciones que enfatizan los principios precoces que rigen la actividad de contar en los bebés y en los niños pequeños.

Aquí las investigaciones se han centrado en demostrar que los niños pequeños no conservan números grandes, pero se muestran capaces de mostrar conservación cuando los números son pequeños.

Para Bever y sus colaboradores (1968) los niños pequeños poseen los operadores lógicos de la conservación del número pero no pueden aplicarlo a números mayores de cinco. Posteriormente, una investigación de Chi y Klhar (1975) encontró que el éxito no se debía al principio de invarianza de las cantidades discretas, sino que el éxito se debía a la identificación de números mediante un proceso que se denomina "subitización" (proceso de enumeración rápida que ocurre con números menores o iguales a cuatro o cinco). Una nueva visión, habla de la utilización de la "correspondencia uno a uno" después de que se haya producido la transformación (Tollesfrud-Anderson y colaboradores, 1994). Son soluciones basadas en actividades de contar.

Parece que los niños más pequeños se ponen a contar o a realizar correspondencias uno a uno, mientras que los niños mayores se basan en el razonamiento lógico, según el cual el número concreto de objetos es siempre irrelevante si no se ha añadido ni quitado nada de las cantidades originales. Merece la pena resaltar que el niño pequeño que utiliza procedimientos de cuantificación para resolver una tarea de conservación está más avanzado que el que se basa exclusivamente en la disposición inicial de las líneas. El niño que cuantifica restringe su interpretación de la tarea de conservación a procedimientos numéricamente pertinentes, aunque el conocimiento contenido en los procedimientos de contar (como la secuenciación o el establecimiento de la correspondencia uno a uno) no se encuentre aún explícitamente representado.

Llevar las ideas de Piaget al aula ha dado lugar a numerosas interpretaciones y estudios de aplicación que, a veces, han sido meras extrapolaciones de sus investigaciones al campo de los procesos de enseñanza-aprendizaje. Esta transferencia mecánica no ha conseguido los efectos esperados en el desarrollo lógico-matemático (Delval, 1986).

Recordemos que Piaget no se ocupó nunca de investigar la enseñanza impartida en las escuelas. Toda su teoría se basa en experimentos acerca del pensamiento realizados con niños, estando elaborados dichos experimentos para los fines que él como investigador perseguía. Según Piaget, el desarrollo cognitivo sigue en el niño sus propias leyes naturales. La escuela lo único que hace es proporcionar el material de enseñanza; el alumno aprende lo que corresponde al desarrollo de su pensamiento en aquel momento.

El propio Piaget tenía unas opiniones muy peculiares acerca del modo en que los niños aprenden las matemáticas y, por lo tanto, acerca de cómo deberían ser enseñadas. Un artículo suyo de 1953 (Hughes, 1986) resume estas opiniones:

"Es un grave error suponer que un niño adquiere simplemente a través de la enseñanza la noción de número y otros conceptos matemáticos. Al contrario, en un grado muy considerable el niño los desarrolla por sí solo, de manera independiente y espontánea. Cuando los adultos tratan de imponer prematuramente determinados conceptos matemáticos a un niño, su aprendizaje es meramente verbal; la auténtica comprensión de tales nociones sólo parece a medida que crece mentalmente.

Un sencillo experimento lo muestra con facilidad. Los padres pueden enseñar sin problemas a un niño de cinco o seis años a nombrar los números del 1 al 10. Si se forma una fila de 10 piedrecillas, el niño puede contarlas correctamente: Pero si las piedrecillas se reordenan de acuerdo con un patrón más complicado o si se amontonan, él ya no podrá contarlas con una precisión constante. Aunque el niño sepa los nombres de los números, aún no ha captado la noción esencial de número: es decir, que el número de objetos integrantes de un grupo sigue siendo el mismo, "se conserva", con independencia de su amontonamiento o del orden que muestre su disposición."

Aquí aparecen, pues, varias ideas características de Piaget. Una de las ideas es la creencia de que enseñar a los niños antes de que estén conceptualmente preparados sólo conduce a un aprendizaje superficial, el verdadero aprendizaje sólo se produce junto con la evolución mental del niño, y en gran medida los conceptos matemáticos son algo que no pueden ser enseñado. También sostiene que si un niño no posee la capacidad de conservación de un número no está preparado para iniciarse en la aritmética escolar. Señala que los maestros deben desconfiar de cualquier aparente capacidad- por ejemplo- contar- que los niños lleven consigo a la escuela. Si los niños no pueden conservar, es probable que este conocimiento aparente se reduzca a un mero aprendizaje verbal y repetitivo.

Nuevamente Piaget (1973) reitera su creencia de que el aprendizaje matemático no tiene lugar simplemente porque el maestro transmita sus conocimientos al que tiene que aprender, y sostuvo, una vez más, que la configuración del conocimiento matemático se produce como resultado natural de la evolución global en las capacidades lógicas del niño. Acentuó el hecho de que este método natural de aprendizaje tiene lugar a través de actividades infantiles y de descubrimiento: *"La captación real de una noción o teoría implica que el sujeto la descubra de nuevo por sí mismo".*

Piaget no entró en detalles de cómo poner en práctica estas ideas en la práctica escolar. Pero se considera que él defendía una introducción muy tardía del simbolismo formal, con un énfasis previo en que en la clase se lleven a cabo actividades físicas con arena, fichas, bloques, palitos, etc.(consideradas actividades prenuméricas) Se suponía que clasificar objetos, ordenarlos por longitud, etc. ayudaría al niño a desarrollar los conceptos matemáticos, y que sólo hay que pasar a la formalización cuando los sujetos están conceptualmente preparados. De acuerdo con muchos seguidores de Piaget, el maestro tiene que desempeñar un papel intelectualmente no intervencionista y relativamente poco importante: las matemáticas son algo que, en esencia, los niños construyen por su cuenta. Kamii (Turner, 1995)desde una perspectiva constructivista defiende una reformulación de los objetivos y del papel del profesor: enfatiza la eliminación de la competitividad, aboga por la supresión de los libros de texto en matemáticas y propone un currículum en el que predominen los juegos y la resolución de problemas que los niños han de resolver. En el caso de la numeración, para un piagetiano, se debe de organizar teniendo en cuenta dos fases sucesivas: en la primera, se proponen al niño una serie de actividades destinadas al desarrollo de ciertas capacidades lógicas muy generales y sólo después se deben de abordar actividades propiamente numéricas, es decir, aquellas en las que el niño cuenta o calcula.

Pero es un hecho que la desaparición completa de las actividades numéricas en la etapa infantil no ha sido aceptada de modo general y es objeto de numerosas polémicas entre partidarios o no de su enseñanza. Basándose en sus observaciones cotidianas, los maestros creen que el encuentro del niño con el número es más precoz de lo que suponen los piagetianos, el niño viene a la escuela con algunas nociones de tipo matemático que no se pueden desestimar, aparte hay presiones de la familia y del entorno, esto hace que los niños de cuatro-cinco años, aún cuando el número no sea trabajado en el aula, sean capaces de afirmar que hay cinco personas de visita en su casa, que hay cuatro claveles en un ramo o que ha perdido siete rotuladores de su estuche.

Además, dicen los maestros, hay una serie de actividades en clase que han hecho recuperar el número dándole más importancia que antes. Una de ellas es la administración cooperativa de la clase: saber el número de los niños que han venido y los que han faltado, el número de niños que se quedan a comer en el comedor, el trabajo con el calendario, el control del material de clase (tijeras, lápices, etc.). Por otra parte, la existencia de numerosos juegos de reglas que se realizan en clase tienen un claro componente numérico, juegos de dados por ejemplo, otros juegos elaborados por los propios maestros y maestras.

Estas opiniones no son contrarías a la utilización de actividades de seriación, correspondencia, inclusión y clasificación en las clases de educación infantil: en cualquier aula de educación infantil los niños juegan con cubos que encajan unos con otros, o meten las tijeras en su caja correspondiente y los lápices y gomas en las suyas, o reparten caramelos comprobando si tienen suficientes para todos o no. Lo que los críticos piensan es que hay que reconsiderar la creencia en las virtudes prenuméricas de estas actividades. No se pone en duda que la teoría de Piaget sea apropiada para explicar cómo madura en el niño el conocimiento del número u otros conocimientos matemáticos.

Puede consultarse una amplia bibliografía sobre actividades de tipo piagetiano en Hohmann, Banet y Weikart (1985), Batlle y Batlle (1988), Castro, Rico y Castro (1989), Maza(1989), Martínez Montero (1991a) y Deaño (1993).

3. Un nuevo enfoque cognitivo: la habilidad de contar

Los intentos por reducir la edad de conservación del número para refutar la teoría piagetiana acabaron degenerando en una forma estrecha de experimentación por experimentación. Los experimentos eran irrelevantes para la teoría piagetiana del número. No se ofrecía ninguna alternativa teórica sustancial de ámbito piagetiano para explicar la reducción en la edad de conservación. Desde mediados de los años 70, los psicólogos evolutivos han analizado las afirmaciones de Piaget a la luz de la ciencia cognitiva. El punto de vista más contrario a la teoría piagetina de la adquisición del número, y de amplia repercusión actual, es el de Gelman y Gallistel (1978) que es una visión claramente innatista. Para Gelman y Gallistel hay que abandonar la idea de conservación para entender cómo adquieren los niños el número. Para ellos, desde los comienzos de la infancia habría algún conocimiento sobre el número, y la correspondencia uno a uno. Esta idea viene a afirmar que hay sesgos innatos que canalizan la atención del niño centrándola selectivamente en las entradas sensoriales relevantes para el número. Desde esta óptica se defiende que el contar representa un proceso cognitivo complejo que prepara la adquisición de habilidades numéricas más tardías. En el importante trabajo original sobre cómo aprenden los niños preescolares a contar, Gelman y Gallistel (1978) demostraron que las primeras manifestaciones de la conducta de contar son mucho más que un simple aprendizaje mecánico y asociacionista y, aunque los niños cometan errores cuando aprenden a contar, sus esfuerzos están restringidos por un conjunto de principios de recuento. Hay una serie de experimentos realizados con bebés y niños preverbales que muestran cómo responden numéricamente a presentaciones que podrían perfectamente haber procesado desde el punto de vista del color o de la forma (Mehler y Dupoux, 1992).

Según este modelo, el conteo estaría integrado por cinco principios que se requieren para el aprendizaje correcto de la técnica de contar: correspondencia uno-a-uno, orden estable, cardinalidad, abstracción e irrelevancia del orden.

1. El principio de la correspondencia uno a uno o biunivocidad

Este principio se refiere al hecho de que, para decidir si dos colecciones son numéricamente iguales, hay que hacer corresponder cada uno de los elementos de una colección con uno y sólo un elemento de la otra colección. Los bebés son capaces de hacerlo cuando los números son pequeños (Mehler y Dupoux, 1992). Pero esto no significa que los niños muy pequeños sepan todo sobre la correspondencia biunívoca, ni mucho menos. Significa que, cuando los niños mayores aprenden a contar más adelante, sus esfuerzos están restringidos por este principio. Puede que cometan muchos errores cuando cuentan, pero lo que raramente hacen es violar el principio de correspondencia biunívoca. Todos y cada uno de los elementos de la colección que el niño intenta contar son etiquetados una sola vez con una única etiqueta simbólica. De este modo, su conocimiento precoz dirige la manera en que los niños pequeños atienden a los ejemplos de contar que les proporciona el ambiente.

El principio de correspondencia uno-a-uno conlleva la coordinación de dos actividades (Bermejo, 1994): el de partición y el de etiquetación. La partición permite establecer diferencias entre el conjunto de elementos contados y el conjunto de elementos que aún tienen que ser contados. La actividad de etiquetación supone la existencia de una serie de etiquetas que el niño haría corresponder con cada uno de los objetos contados. En síntesis, se considera que los niños cumplen este principio si señalan y etiquetan todos y cada uno de los objetos del conjunto. Los errores encontrados se deben más frecuentemente al proceso de partición que al de etiquetación, siendo cuatro las principales categorías identificadas: omisiones de objetos, repeticiones de elementos, la tendencia a regresar a un ítem cuando ese ítem y los próximos a él ya habían sido contados y finalizar el contar cuando aún no han sido contados todos los objetos del conjunto.

En un trabajo de Karen Fuson (1988) se lleva a cabo un análisis aún más detallado de la correspondencia uno-a-uno, proponiendo la existencia de dos correspondencias en el conteo: una espacial entre el objeto y el acto de indicación (señalar con el dedo) y otra temporal formada entre el acto de indicación y el numeral emitido. Como consecuencia de este análisis, los errores pueden producirse a nivel de la correspondencia temporal (por ejemplo, numeral-señalamiento), a nivel de la correspondencia espacial (por ejemplo, señalamiento-objeto) o en ambos niveles simultáneamente (más detalles en Bermejo y Lago, 1991).

2. El principio de ordenación estable

En principio las etiquetas no tienen por qué proceder de una lista convencional, con tal de que cumplan determinadas restricciones de recuento. En cuanto al principio de orden estable, el modelo de Gelman y Gallistel determina que la secuencia empleada para contar debe ser repetible y estar integrada por etiquetas únicas. Por ejemplo, si un niño dice "uno, dos tres, siete, diez" al contar un conjunto de cuatro objetos siempre y cuando cada etiqueta se utilice una vez y la secuencia ordinal se mantenga en todos los conjuntos que cuente, el niño, según Gelman, estaría contando de acuerdo con restricciones numéricas, a pesar de la originalidad de su lista de números. Y son estas restricciones las que dictan la manera en que el niño termina por aprender la secuencia convencional de números.

Con respecto a la adquisición de la secuencia convencional de los numerales se han diferenciado dos fases: de adquisición y de elaboración. Debido a que el proceso de adquisición y consolidación de la secuencia estándar es lento y largo ambas etapas suelen solaparse. Durante la fase de adquisición la secuencia funciona como una estructura global unidireccional que consta de los siguientes fragmentos: una parte inicial estable y convencional, un fragmento estable y no-convencional y una parte final integrada por fragmentos que no son ni estables ni convencionales.

En la fase de elaboración Fuson et al (1982) distinguen cinco niveles en función de los nuevos vínculos que surgen entre los elementos de la secuencia y de la consolidación de los nexos ya establecidos.

A. Nivel de secuencia o hilera

Las palabras numéricas aparecen indiferenciadas dentro de la secuencia, de manera que aquéllas sólo pueden enunciarse dentro del recitado de la secuencia, entendida ésta como un todo. Así, en este primer nivel de elaboración los niños sólo pueden emitir los numerales ordenadamente, empezando por el 1. Este nivel sería anterior a los dos años y medio.

undostrescuatrocincoseis.........

B. Nivel de cadena irrompible

Durante el segundo nivel se inicia la diferenciación de los elementos de la secuencia, las palabras dentro de la secuencia numérica son ya unidades lingüísticas distinguibles de las demás y permiten establecer una correspondencia uno a uno y, con ellas, tanto el significado cardinal como ordinal del número.

Pero las relaciones entre dichas palabras son de carácter unidireccional (contar hacia atrás presenta numerosos errores) y cada una de ellas está estrechamente relacionada con una secuencia verbal. De esta manera, no se puede producir un trozo de la secuencia a partir de un número dado sino que ha de recordarse toda la secuencia a partir del uno.

uno, dos , tres, cuatro, cinco, seis,...

Esta habilidad de contar hacia adelante, se desarrolla a lo largo de la edad, a los 4 años el 82% de los niños son capaces de seguir una secuencia a partir de tres palabras numéricas (Fuson et al., 1982).

C. Nivel de cadena rompible

Ya existe en este nivel una mayor comprensión de los lazos existentes entre las palabras numéricas que, al independizarse de secuencias específicas, permiten la aparición de dos nuevas destrezas:

- Contar hacia adelante a partir de una palabra numérica
- Contar hacia adelante desde una palabra hasta otra.

La primera, a partir de un número menor que diez, se adquiere entre los tres años y medio y los cinco años, mientras que, si el número de partida es una decena, la adquisición se puede retrasar hasta los seis años.

La segunda va detrás de la primera, posiblemente porque requiere el mecanismo adicional de recordar la palabra de llegada y compararla continuamente con las palabras alcanzadas en el conteo.

En este nivel los niños pueden responder a preguntas como "¿Cuál es antes?" y "¿Cuál es después?" o "¿Cuál es mayor, 4 o 9? o, en el conteo, "¿cuál viene antes, el 4 o el 8?".

D. Nivel de cadena numerable

En este nivel se pueden numerar trozos de la secuencia numérica, lo que da lugar a destrezas particulares: Contar desde un número hasta otro, averiguando el número de palabras entre ambas, y contar un número específico de palabras a partir de una determinada. La dificultad añadida consiste en incorporar al conteo un procedimiento de rastreo del número de palabras contadas. En un ejemplo, la tarea a llevar a cabo por un niño que tiene este nivel resuelve la siguiente pregunta: "Cuenta cuatro a partir del cinco. ¿En qué número te paras?". Este nivel se consigue entre los seis-siete años.

//cinco, seis, siete, ocho, nueve, //

E. Nivel de cadena bidireccional o terminal

Finalmente, el quinto y último nivel representa la culminación de todo el proceso de elaboración. Ahora los niños serán capaces de emitir sin tropiezos y de manera fluida y automatizada la secuencia de numerales sin importar la dirección. Por ejemplo, secuencias crecientes o decrecientes: contar desde 25 nueve números hacia atrás en, aproximadamente, el mismo tiempo que hacia adelante, y contestar el número que alcanza.

Este trabajo exige mucho al niño; se necesita mucha memoria a corto plazo para realizarlo, porque debe pronunciar los números conservando en la memoria a corto plazo el recuerdo de elementos ya contados (en el ejemplo sería el cinco). Con frecuencia, ante este tipo de tareas el niño se ayuda con los dedos, y ésta es una muy buen manera de apoyarse para avanzar en el dominio de la serie numérica y el contar.

3. El principio de cardinalidad

El principio de cardinalidad establece que sólo el último término de cada proceso de recuento representa el valor cardinal del conjunto concreto contado. El niño asigna un significado especial a la última etiqueta empleada durante el conteo, de modo que esta etiqueta representa no sólo al último objeto contado, sino también al conjunto total de objetos. Gelman y Gallistel (1978) consideran que incluso los niños de dos años y medio pueden aplicar este principio, aunque aún no posean una comprensión plena del mismo. Otros autores proponen un año o incluso dos o más (cuatro años y medio) como edad media de aparición y comprensión del cardinal numérico. Lo cierto es que el niño no adquiere súbitamente este principio, sino que la comprensión del mismo supone un proceso evolutivo más o menos largo. Desde esta óptica Bermejo y Lago (1990) identifican seis niveles o pasos evolutivos en al adquisición de la cardinalidad: 1. Incomprensión de la situación y respuesta al azar. 2. Repetición de la secuencia de conteo utilizada. 3. Volver a contar: el niño vuelve a contar cuando se le pregunta cuántos objetos hay. 4. Aplicación de la regla del "cuántos": ante la pregunta ¿cuántos objetos hay? el niño responde mecánicamente con el último numeral de la secuencia empleada en el conteo. 5. Responder con el numeral mayor de la secuencia de conteo, sea o no el último de la secuencia. 6. Respuesta correcta de cardinalidad. Este principio ha recibido muchos ataques por parte de investigadores del desarrollo. Achacan a Gelman y Gallistel que el criterio de cardinalidad usado es más débil que el utilizado por otros autores. Para Gelman y Gallistel, un niño tiene el principio de cardinalidad si sistemáticamente da la última etiqueta del recuento como el número total de elementos del conjunto contado. Sin embargo (como Piaget) Bryant (1988) y Fuson (1988) utilizan un criterio más estricto para el principio de cardinalidad: conseguir ésta requiere usar el recuento, no sólo para dar el número de elementos de un conjunto, sino también para hacer comparaciones numéricas entre dos o más conjuntos, y esto sería algo que se desarrolla más tardíamente. Pero Gelman y Gallistel lo que se proponían es identificar los principios fundacionales que guían los primeros aprendizajes relacionados con el número. Ésa es la razón por la que estas autoras, a diferencia de Piaget, creen que la capacidad de contar es importante para la conservación del número.

Por otra parte, Bermejo y Lago insisten en que la relación entre conteo y cardinalidad no es esencial como se sigue del modelo gelmaniano, ya que el conteo no es más que uno de los procedimientos que pueden emplearse para determinar el cardinal de un conjunto, al igual que puede hacerse con la estimación o la percepción inmediata, que son también operadores de cuantificación.

4. El principio de abstracción

El principio de abstracción establece que los principios de correspondencia uno-a-uno, orden estable y cardinalidad pueden ser aplicados a cualquier colección de entidades u objetos, sean éstos reales o imaginarios. Se refiere al qué se cuenta (los principios anteriores se refieren al cómo se cuenta). Su comprensión aparece muy pronto, ya que los niños pueden contar con la misma facilidad conjuntos de objetos homogéneos como heterogéneos (Gelman y Gallistel, 1978).

En otros estudios, a través de protocolos, se han distinguido cinco etapas en el desarrollo de este principio (Steffe, 1983). Esta etapas consisten en la construcción por parte del niño de diversos tipos de unidades objetos de recuento (Maza,1989):

- Unidades perceptivas. Los primeros elementos que pueden ser contados son los que se encuentran en su campo perceptivo: sus propios compañeros, sus lápices, etc.

- Unidades figurales. El progreso del niño en el contar depende cada vez menos del material perceptivo. Se trata de sustituir las unidades perceptivas por representaciones figurales de las mismas: al contar los animales presentes en una página de un libro.
- Unidades motrices. Es el acompañamiento de actos motores unidos a las palabras numéricas que se utilizan al contar: tocar, señalar, agarrar, etc. Los actos motores terminan sustituyendo o haciendo perder importancia a las unidades perceptivas y figurales.
- Unidades verbales. Una vez que la coordinación de actos motores y las palabras se han automatizado, cada producción vocal de una palabra numérica adquiere entidad propia y se transforma en un objeto contable. Las unidades verbales hacen que el niño sea capaz de formar partes de la secuencia numérica.
- Unidades abstractas. Aquí el niño puede prescindir de todo tipo de ayuda externa o vocal de su memoria y cuenta con un modelo de contar aplicable a distintos elementos y situaciones.

5. El principio de irrelevancia o del orden irrelevante

Finalmente, el principio de irrelevancia del orden indica que el orden en que se cuentan los elementos de un conjunto es irrelevante, de modo que se obtendrá el mismo cardinal con independencia del orden en que sean contados los ítems. Los niños que dominan este último principio conocen una serie de hechos:

1. que cada uno de los elementos de un conjunto es una "cosa" y no un "uno", un "dos", etc.;2. que las etiquetas verbales se asignan de modo arbitrario a los objetos y no se adhieren a los mismos; y 3. el niño se da cuenta de que el valor del cardinal del conjunto es el mismo sin importar que ítem ha sido etiquetado como "uno", "dos", etc. En general, este principio indica que gran parte del conteo es arbitrario. Los niños que aplican bien los tres principios de contar (correspondencia uno a uno, orden estable y principio de cardinalidad) pueden fracasar en las tareas para evaluar este principio (señalar un elemento de la muestra y hacer que el niño le asigne un numeral concreto, por ejemplo, se señala el segundo elemento de la muestra y se le dice que le asigne el "uno", luego el "dos" y así sucesivamente). Esto quiere decir que saber contar no basta para resolverla correctamente. Si los niños no se percatan de que el orden en que se etiquetan los ítems es irrelevante, será difícil concluir que comprenden el papel del conteo en la cuantificación de una muestra. Los niños suelen adquirir este principio en torno a los cinco años.

Algunos estudios han tratado de relacionar el conteo con otras habilidades. Sophian (1995) realizó tres investigaciones con niños de entre tres y seis años en las que encontró una fuerte relación entre contar y la noción de conservación, siendo mayor esta relación cuanto más mayores son los niños. Asimismo, el mejor conocimiento de la secuencia numérica correlaciona con el mejor conocimiento del valor de posición de los números (Boulton-Lewis, 1993).

Para terminar este apartado, mencionemos las dos posturas consideradas para explicar el desarrollo de la habilidad de contar: 1. Una que considera que el contar consiste inicialmente en un aprendizaje memorístico y mecánico carente de sentido, y 2. la que defiende la existencia de una comprensión implícita de los principios de conteo desde el primer momento en que se inicia (Bermejo y Lago, 1991). Desde la primera aproximación se propone un proceso de aprendizaje que tiene lugar a través: a) de la creación de hábitos que constituyen fieles reflejos de las ejecuciones convencionales presentes en el entorno de los niños; b) del refuerzo que reciben por parte de los adultos, de modo que las habilidades componentes del conteo, reforzadas, se van asociando en la memoria de los niños; c) de la abstracción de las generalizaciones comunes a todos estos hábitos, que deriva en un conocimiento basado en principios. No obstante, dado que los hábitos son inicialmente débiles porque no han sido suficientemente reforzados, los niveles de ejecución y generalización también son bajos. La inducción de generalizaciones se producirá cuando los niños hayan tenido experiencia suficiente, y sólo entonces es correcto afirmar que comprenden los principios de conteo. Una vez alcanzado este punto, las ejecuciones de los niños cumplirán los criterios de: consistencia de comportamiento y generalización a situaciones nuevas.

Desde la segunda orientación, tipo innatista, Gelman y colaboradores atribuyen tres funciones a los principios: 1) dirigir los procesos de atención y el almacenaje coherente y organizado de los datos; 2) propiciar actividades de aprendizaje autogeneradas, es decir, los principios permiten generar nuevos planes de acción; 3) beneficiarse de los procedimientos correctamente ejecutados para convertirlos en entradas de información relevantes para el desarrollo de una competencia conceptual más avanzada. Esta tercera función concuerda con el planteamiento de este modelo en cuanto a que los principios no son "recetas", algo estático y definitivamente acertado o erróneo, sino que gradualmente es mayor su nivel de elaboración y, consiguientemente, su precisión. No obstante, la comprensión y adquisición progresiva del principio de cardinalidad, por ejemplo, tal como acabamos de ver, parecen ajustarse mejor a un proceso de construcción paulatina que a la existencia de un principio innato.

4. Algunas propuestas de actividades

La diversidad de enfoques de los investigadores, en este caso sobre el conteo, no permite considerar la práctica en el aula como una simple aplicación de lo que sería el estado de la ciencia psicológica, como ha ocurrido en el caso de la teoría piagetiana. Los conocimientos proporcionados por la Psicología del Desarrollo tienen que ser reinterpretados por pedagogos, matemáticos y maestros que juzguen su pertinencia en el campo de la didáctica y aporten hipótesis susceptibles de ser conjuntamente contrastadas por estos profesionales. Intentar una aplicación directa de teorías psicológicas a la práctica educativa conduce a interpretaciones erróneas de las propias teorías (Delval, 1986).

Brissiaud (1993) propone que se enseñe a contar a los cuatro años aproximadamente. Pero expresa algunos consejos para aquellos maestros que quieran hacerlo más precozmente: utilizar "cancioncillas de los números", representar números con colecciones de muestras de dedos y nombrar cantidades de modo directo sin contar los dedos, utilizar colecciones de muestras organizadas.

Un enfoque interesante desde el campo de la práctica es el de Peltier (1995). Ella considera tres tipos de situaciones que van a permitir al niño conformar un "caudal de experiencia" necesario para una construcción efectiva del concepto de número: a. situaciones rituales, b. situaciones funcionales y c. situaciones construidas.

Situaciones rituales: utilización del calendario con lectura-observación de la sucesión de los números; conteo de previsión ("el cumpleaños de Juan es el día 10 de febrero, vamos a contar los días que faltan"). La lista de enumeración de los alumnos que han venido a clase, comparación con el día anterior, etc. Distribución del material de trabajo (para trabajar la correspondencia uno a uno). La utilización de juegos con los dedos.

Situaciones funcionales. este tipo de situaciones se desarrollan a partir de problemas; se plantean según la vida de la clase y su entorno. Por ejemplo, preparar una excursión, preparar una actividad para el recreo, o la organización de un espectáculo.

Situaciones construidas. Son elaboradas por el maestro con fines de aprendizaje precisos; se articulan alrededor de problemas para utilizar los números. Las situaciones construidas son muy diferentes de las situaciones rituales, pues permiten adaptar ciertos elementos a las posibilidades del alumno; permiten también fijar ciertas restricciones susceptibles de provocar un cambio en los procedimientos de los niños.

Maza (1989) propone una serie de bloques de contenido que deben estar presentes en el currículum escolar de Educación Infantil y que enfatizan el tratamiento basado en el contar como elemento vertebrador del proceso de enseñanza aprendizaje de la numeración. Los hemos agrupado en los siguientes bloques:

1. Recitado de la secuencia numérica

El primer contacto que tiene el niño con las palabras numéricas en secuencia es el recuento verbal. Según bajan los escalones los padres cuentan espontáneamente desde uno en adelante, al marchar en un ascensor se van contando los pisos, observa a los hermanos o a otros niños jugar al escondite. En la mayoría de las ocasiones, este recuento va unido al desarrollo de una secuencia rítmica que atrae extraordinariamente su atención: Dar saltos al compás de las palmadas mientras se recita la secuencia numérica, por ejemplo, es un juego que suele disfrutar, sea en su casa o en la escuela.

Si el niño tiene capacidad para el contar a partir de los dos años y medio, se pueden comenzar actividades de recitado en esta edad. Al principio, el elemento predominante será el mismo ritmo, dado que las palabras numéricas concatenadas se desconocen a edades tan tempranas. Progresivamente, irá enlazando el "uno" con el "dos", más tarde le añadirá el "tres", etc.

De esta forma, es fácil ver la relación que tiene este recitado con el fomento de la estabilidad en el contar por cuanto, paulatinamente, el niño irá aumentando la parte convencional del recuento que hace. Al tiempo, el mayor dominio sobre las palabras numéricas le permitirá construir relaciones entre estas palabras, representar mentalmente dichas relaciones a través de la recta numérica mental, etc.

Es el comienzo del aprendizaje numérico infantil. Se ha de fomentar, entonces, el recitado de la secuencia numérica progresivamente desde el 1 en adelante. Actividades adecuadas son: el recitado de canciones con los números, el juego del escondite en el que se queda tiene que "contar hasta" un número y luego se va ampliando la secuencia numérica, por ejemplo hasta ocho, luego hasta nueve y así hasta ampliar la secuencia al veinte.

2. Introducción de la estabilidad en el recuento

El objetivo de la estabilidad en el recuento es propiciar el aumento progresivo de la parte convencional del recuento así como de su estabilidad. Muestra relación con el recitado de la secuencia numérica y también con el desarrollo del principio uno-a-uno. Si el niño posee la capacidad de asignar una palabra a cada elemento y viceversa, esta capacidad ha de extenderse tanto como se pueda de un modo constante.

Así, si un niño de cuatro años llega con cierta facilidad a contar hasta el quince, se le debe ayudar a contar hasta dieciséis, a diecisiete, etc. La forma más elemental de hacerlo resulta ser el practicar el recuento alternado maestro-niños o niño-niño. De esta forma y en un contexto de juego, se trataría de que un niño o grupo de niños dijera "quince" para que otro grupo le respondiera con la misma palabra, luego "dieciséis", volviéndose a repetir. Este recuento alternado tiene la ventaja de no sobrecargar la memoria infantil, cosa que podría suceder si se mencionaran cinco palabras seguidas que el niño hubiera de memorizar y repetir en la misma secuencia.

El recuento verbal permite numerosas variaciones posteriores que van iniciando los objetivos del nivel de cadena con roturas. Tal es el caso de un recuento alternado pero progresivo: Un niño diría "cinco" para que otro le respondiera "seis", un tercero "siete" y así, sucesivamente. Otra forma más elaborada de recuento, en la cual las palabras numéricas habrían de entenderse aisladas pero en relación con las demás sería el recitado salteado de la secuencia numérica: Realizar el recuento de manera que a una palabra le suceda un silencio marcado por un golpe en la mesa. De esta forma, se contaría "uno, golpe, tres, golpe, cinco, golpe, etc".

3. Actividades en el nivel de cadena rompible, cadena numerable y principio uno a uno

En este nivel, que une a varios, las palabras numéricas se van independizando de secuencias especificas, siendo posible el desarrollo de destrezas como:

a) Recitado de la secuencia numérica a partir de un número distinto del uno y, en principio, menor que diez. Por ejemplo, cuenta desde el 3 hacia adelante.

b) Recuento desde un número a hasta un número b, siendo a y b predeterminados. Por ejemplo, cuenta desde 4 hasta 8.

c) Recuento hacia atrás desde un número menor que veinte. Por ejemplo, cuenta para atrás desde 10.

d) Recuento hacia atrás desde un número b hasta un número a, siendo a y b predeterminados. Por ejemplo, cuenta desde el 12 hasta el 7.

El maestro tiene que plantear situaciones de recuento donde el niño tenga oportunidad de comprobar que el incumplimiento u olvido de una característica importante modifica el resultado del contar. Así, podrá contar grupos de objetos: de derecha a izquierda, si los elementos están colocados en hilera. O bien, comenzar por un objeto no situado en un extremo. También puede contar objetos que no estén juntos. Es preciso que al contar vaya señalando, de alguna forma, los objetos y vaya diciendo una sola palabra. Esto es una tarea que hay que desarrollar a lo largo de toda la Educación Infantil e incluso en niveles superiores de escolaridad.

Aquí el objetivo primordial es el aprendizaje del principio uno a uno, lo que comporta desarrollar operaciones lógicas como la de partición de un conjunto y conseguir la correcta asignación de una palabra numérica a cada uno de los elementos objetos de recuento.

En el recuadro presentamos algunas actividades que pueden realizarse:

Descubrir el error y hacerlo bien.
Presentar a los niños a "Sr. Mezcla", un títere que tiene muchos errores cuando se pone a contar. Se dice a los niños: "Escuchad al Sr. Mezcla con mucho cuidado y mirad cómo cuenta estos bloques. Si veis que comete un error (que se equivoca), levantad vuestra mano derecha, tenemos que ayudar al Sr. Mezcla a contar los bloques correctamente".
Hay que hacer que al contar bloques, fichas, cromos, etc. cometa los siguientes errores:

- Saltarse uno de los bloques.
- Contar el primero o el último de los objetos dos veces u otro objeto cualquiera más de una vez.
- Cometer un error en la secuencia numérica.
- Dar el cardinal del conjunto con un valor distinto del último número que se ha contado (esto último es también válido para el desarrollo de la cardinalidad).

Cuando los niños descubran un error preguntar:"¿Qué ha pasado?" y decir "Puedo explicar a Sr Mezcla porque está equivocado y decirle qué puede hacer con más cuidado para la próxima vez que cuente".

Contando objetos.
Diseñar un plan para ayudar a los niños a mejorar su manera de contar objetos o dibujos. Ordenar objetos en una fila primero y luego en círculo y hacer que los niños cuenten cada objeto. Proporcionar a los niños dibujos de objetos ordenado y desordenados (en fila o en círculo o con una distribución irregular, Martínez Montero, 1991b). Enseñar a los niños a marcar cada objeto que sea contado. Ver si estas estrategias ayudan a los niños a contar y si ganan con la práctica.

4.Desarrollo de la cardinalidad

Cuando el niño dispone de una secuencia de palabras numéricas y las aplica al contar elementos de naturaleza cada vez más variada, está en disposición de dotar a la última palabra de dicho recuento de un significado especial. Consiste éste, naturalmente, en que va a representar a todos los elementos del conjunto contado.

La construcción del significado cardinal se basará, también, tanto en las actividades de clasificación que supone la formación de conceptos como en las de ordenación de diversos elementos respecto a los distintos valores que puede tomar una magnitud continua, serán pues, actividades necesarias para desarrollar la noción de cardinalidad.

El comienzo de la comprensión del principio cardinal empieza en el nivel más primario del conocimiento, por la simple asociación de la pregunta «¿cuántos hay?» a la respuesta dada por la última palabra del recuento. A través del desarrollo de otras actividades, en particular el de comparación numérica, esta comprensión alcanza cotas más altas en el terreno de la lógica infantil. Esta comprensión está limitada por la capacidad infantil de comprensión de las relaciones entre las partes y el todo o, en otras palabras, de la inclusión jerárquica de conjuntos que ya hemos señalado al hablar de la teoría piagetiana.

El desarrollo de la cardinalidad implica realizar actividades como la determinación del cardinal de un conjunto dado a través del recuento, la construcción de conjuntos cuando sólo se le proporciona al niño su cardinal, o cuando se le proporcional el cardinal y sólo algunos elementos del conjunto para que el niño lo complete, y así, hasta llegar a la representación simbólica de los cardinales. Lógicamente este desarrollo parte de cardinales muy pequeños (0 a 10) hasta llegar a cantidades mayores en función de las condiciones particulares de cada niño.

5. Aplicación del principio de abstracción

El desarrollo de este principio transcurre a todo lo largo de toda la Educación Infantil. El niño aprende las palabras numéricas en el recitado, las aplica a actividades de recuento de conjuntos a través del principio uno a uno al tiempo que aumenta la parte convencional de dicha secuencia. Durante el proceso que se inicia con la aplicación del principio uno a uno debe contar elementos de un conjunto.

La secuencia de desarrollo de este principio empieza por el recuento de objetos directamente manipulativos. En segundo lugar se hará de forma perceptiva, es decir, que estén al alcance de sus sentidos visual, táctil, etc. Contará caramelos, otros niños, gomas, lápices, tizas o cualquier otro conjunto de elementos que tenga a su alrededor. Véanse las actividades propuestas en el recuadro.

Haciendo "dos" y "tres".
El objetivo es que hagan, en primer lugar, grupos de dos. Cada niño tiene 10 fichas. Tienen que hacer tantos grupos de dos como puedan. Cuando lo hayan hecho volver a juntar las 10 fichas y repetir hasta que las hagan muy rápidamente. En próximas ocasiones hacerlo con 12 fichas y hacer grupos de tres. Inicialmente lo harán en un minuto pero con la práctica se pretende que lo hagan en menos de 10 segundos.

Viendo "dos" y "tres".
Se esconden tres monedas. Descubrirlas y preguntar, "¿Cuántas monedas hay aquí?". Esperar a que los niños las vean y comprobar si las cuentan de una en una, o las ven como un todo. Repetir con dos monedas. Animar a que respondan. La meta es que contesten a la pregunta de manera muy rápida (con solo una mirada).

Posteriormente, se podrán pasar a contar elementos figurales, es decir, representaciones de los objetos reales. Tal es el caso de los niños que aparecen en una fotografía, los animales presentes en una lámina, etc. Cuando ha tenido suficiente contacto con elementos de estos dos tipos y el maestro se ha asegurado de la aplicación correcta del recuento en estos casos, se deberá propiciar que se cuenten elementos no directamente perceptibles, ni siquiera a través de sus representaciones.

Para conseguir esto, el procedimiento más aconsejable será el de desarrollar actividades en que los elementos a contar estén alejados perceptivamente del niño. Un caso podría ser el de contar los puntos de luz que hay en el aula. Como están, normalmente, fuera del alcance de su mano y aparecen separados, le resultará difícil realizar su recuento con el simple apoyo visual. El logro de esta actividad se facilitará si se disponen de ayudas externas a la memoria, como es el caso de observar un punto de luz y extender un dedo, pasar la vista al siguiente haciéndole corresponder un segundo dedo, y así sucesivamente. Bastaría luego contar los dedos que se han extendido para averiguar el número de puntos de luz presentes en el aula.

Sin embargo, es posible realizar un recuento semejante cuando los elementos a contar no son perceptivamente visualizados. Tal sería el caso de un cuento en que aparecieran una serie de animales, tipo de cuentos que, por lo demás, son muy frecuentes en este nivel. ¿Cómo contar los animales presentes en el cuento? Al presentarse cada uno de ellos el niño extendería un dedo de forma similar a lo realizado en el ejemplo anterior. Posteriormente, se contarían nuevamente los dedos extendidos.

En un caso, apoyo visual pero alejado, en otro apoyo auditivo. Estas actividades no sólo desarrollarían aspectos sensoriales en el niño, sino que permitirían aplicar un mismo procedimiento a situaciones variadas.

Si el niño, en un momento determinado, logra realizar un recuento similar a lo anterior sin la ayuda externa a la memoria que suponen los dedos extendidos, es decir, si logra contar a través de unidades verbales, se habrá dado un paso grande hacia la interiorización del recuento y la construcción de la recta numérica mental como fundamento de la representación del número.

Otro aspecto a destacar en el desarrollo de este principio tiene que ver con la forma de presentación de los elementos del conjunto, lo dicho en el tipo de actividades para contar sigue siendo válido para el desarrollo de este principio.

Estos modelos se relacionan en gran medida también con el principio cardinal y con el paso que lleva de dicho principio hasta la representación gráfica del número, tal como se comentará más adelante.

6. Otras actividades: desarrollo de la representación simbólica

A. Representación gráfica de los números

Un aspecto muy importante en el aprendizaje de la numeración es el proceso de simbolización del código numérico. El estudio histórico de los sistemas numéricos escritos señala que éstos estuvieron mucho tiempo ligados a la correspondencia uno a uno. Los sistemas posicionales son muy económicos pero su comprensión es compleja y larga, de ahí la necesidad de una enseñanza sistemática. Hughes (1986) en la aparición de lo simbólico se observan cinco etapas:

1. Fase de respuestas idiosincráticas: lo simbolizado por el niño no presenta ni traza de tener relación con el referente a los ojos de personas ajenas al propio niño. Pero esto no quiere decir que carezca de relación para el niño que la produce.

2. Fase de respuestas pictográficas. El niño intenta representar lago parecido a lo que tiene delante, dejando constancia de la cantidad existente de objetos. No lo logra muy bien, pero hay una clara intención de correspondencia entre lo real y lo que el niño intenta representar. El problema que todavía persiste es que el niño se centra más en la fidelidad al modelo que en la intención de la comunicación. Si el niño ha de transmitir por escrito la existencia de cuatro bloques, irá más a reproducir estos cuatro bloques que a transmitir el número exacto de los mismos.

3. Fase icónica. En esta fase se establece una correspondencia plena entre lo que representa y lo real, mostrando unos símbolos que van directamente a la intención de la comunicación y no a reproducir fielmente el modelo. El niño entiende lo que tiene que hacer, y lo representa de manera económica y personal.

4. Fase simbólica. Emplea el nombre de los números o bien las cifras, como forma más rápida, económica y efectiva, tanto para él como para el receptor de la información.

Bassedas y Sellarés (1982) realizan una clasificación distinta en la evolución de los sistemas gráficos: conductas sin combinatoria ni estabilidad, conductas con cifras "árabes", conductas sin combinatoria y con estabilidad, conductas aditivas (de correspondencia, con signos especiales para las decenas), conductas que intentan la transposición del sistema de numeración universal y conductas de transposición del sistema de numeración universal.

Una vez que el niño sabe responder a la pregunta básica desarrollada en la cardinalidad ("¿cuántos hay?"), debe representar ese concepto así formado: El concepto de tres, de cuatro, etc. Si el objetivo final es la realización de la grafía del número con el dibujo, en este caso de «3», «4», etc., el paso intermedio necesario resulta ser la representación simbólica del conjunto formado.

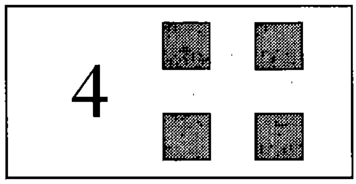
El momento de introducir tanto el símbolo como la grafía del número no debe ser precipitado en aras de la socialización de los conocimientos infantiles. Tanto uno como otro son formas de representación que presentan dos limitaciones: Una, relacionada con el desarrollo psicomotor que haya alcanzado o de que sea capaz el niño, desarrollo muscular y destrezas de copia (en este caso es necesaria la coordinación óculo-manual y la motricidad digital fina). Por ello conviene que su introducción venga precedida por los necesarios ejercicios preparatorios en este sentido, ejercicios que deben relacionarse con actividades de preescritura que tanto se hacen en las aulas de Educación Infantil. La segunda limitación es conceptual. Hasta asegurar el comienzo del dominio del principio cardinal no resulta válida cualquier forma de representación de dicho cardinal. Cuando la pregunta «¿cuántos hay?» comience a responderse con seguridad, cuando el concepto de número vaya cobrando en la mente infantil todo su significado cardinal, es el momento de dotar de un significante al concepto cuyo significado comienza a construirse.

El conjunto que se le presenta al niño está formado, por ejemplo, por cinco elementos en una disposición aleatoria. El modelo integrado por cinco puntos mantiene una correspondencia uno a uno con el conjunto anterior y, al tiempo, muestra unas características más abstractas y una relación perceptiva más directa y global.

Una vez el símbolo se sabe hacer corresponder al conjunto y se es capaz de construir conjuntos a partir de un símbolo de su cardinal, es posible pasar a representarlo mediante signos como las grafías, signos eminentemente culturales y, por tanto, ajenos a la propia estructura conceptual del número. Progresivamente, sustituirán en la descripción cardinal de un conjunto a los símbolos, conviviendo sin embargo con ellos todo el tiempo que resulte necesario. De esta manera, se asociarán al conjunto de manera que se dibuje la grafía del cardinal de un conjunto dado y se pueda construir dicho conjunto a partir de la grafía. Existen tres tipos de actividades: 1. Construcción de las grafías de los números. 2. Asociación de un conjunto con n elementos con la grafía correspondiente. y 3. Asociación de la grafía con la construcción de dicho número de elementos.

Los tres tipos de actividades están relacionados, de forma que cuando se simbolicen los elementos de un conjunto a través de una constelación de puntos, respetando la correspondencia uno a uno pero con representaciones más abstractas, dicho simbolismo venga también asociado a una grafía que resulte más breve y más beneficiosa socialmente.

Presentamos un tipo de tarjeta modelo que puede servir para ayudar a establecer la conexión entre símbolo y cardinal:



B. Comparación numérica de conjuntos

Si el principio cardinal permite al niño asignar una palabra numérica representativa del todo a un conjunto cualquiera, la actividad fundamental bajo la cual la utilización de cardinales cobra todo su sentido, es la comparación numérica de conjuntos.

El desarrollo de esta habilidad tiene que ver con actividades anteriores al mismo principio cardinal. Las primeras actuaciones del niño en este sentido residen en las comparaciones globales entre conjuntos que son facilitadas por el uso de cuantificadores (más, menos, muchos, pocos, etc.). Cuando los cuantificadores resultan insuficientes para la comparación de las cantidades de los conjuntos en comparación, sobre todo porque entre ellos haya una diferencia difícil de estimar, resulta imprescindible la aplicación de los distintos cardinales.

Para preparar este recurso parecen convenientes dos tipos de actividades complementarias: La primera consiste en la comparación de conjuntos a través de la construcción de líneas-guía realizando el principio uno a uno, de forma que la pregunta «¿Dónde hay más?» pueda ser respondida por la observación de aquel conjunto, algunos de cuyos elementos no tiene pareja en la comparación.

La segunda, amparada en una correcta representación de la recta numérica, consiste en la comparación de diversos cardinales, actividad propia del comienzo del nivel de cadena rompible. De esta forma, basándose en la acción del recuento y en la representación antes mencionada, el niño habría de responder a preguntas del tipo: ¿Cuál es mayor, cinco o nueve? Estas preguntas podrían venir precedidas por otras más sencillas en torno a la cuestión «¿y después?».

Con este bagaje se deben plantear, entonces, actividades propiamente de comparación numérica de conjuntos de un tamaño relativamente grande. Ello es debido a que la comparación entre conjuntos de un número pequeño de elementos puede resolverse directamente por subitización o por el establecimiento de líneas-guía (rectas numéricas), como anteriormente. Los conjuntos mayores requieren, por el contrario, el recuento de cada uno de ellos para el establecimiento de su cardinal respectivo y, posteriormente, la comparación de dichos cardinales. Apoyados en la actividad antes mencionada, el cardinal mayor habría de responder a aquel conjunto cuya cantidad de elementos también fuera mayor.

C. Composición y descomposición de números

Los procesos de razonamiento numérico que implican el descubrimiento de relaciones numéricas están implicados en las actividades de composición y descomposición de números.

Componer dos números significa observar que, al añadir uno al otro, se obtiene un número mayor que ambos. Descomponer un número representa establecer el hecho de que la composición de los dos números resultantes origina el anterior. Es decir, la labor más esencial implicada en estas actividades es el establecimiento de una adecuada relación entre el todo y sus partes. La flexibilidad con que ello se haga dependerá del grado de dominio de esta relación lógica que va a ser fundamental para el aprendizaje de los problemas aritméticos de una sola operación (Aguilar, 1996). En el recuadro se presenta una actividad muy adecuada para la composición y descomposición de números.

Reorganizando números

Usar dados, dominós, dibujos de puntos, y tarjetas con dibujos de 10 objetos para practicar la reorganización durante varias semanas. Mostrar dos dibujos al mismo tiempo y que los niños digan el total (el número) de ambos. Después los niños reorganizan los números con algunas actividades: Por ejemplo el "siete es cinco y dos", "siete es diez menos tres". Otro ejemplo, "seis es cinco y algo" y "diez menos algo". Al principio se permiten diez o doce segundos para responder pero luego se va disminuyendo el requerimiento de tiempo para mejorar en ellos la habilidad de reorganizar el número

5. Referencias bibliográficas

AGUILAR, M. (1996). *Diseño y Aplicación de un Programa Instruccional de Resolución de Problemas Aritméticos.* Tesis doctoral no publicada. Universidad de Cádiz.

ANTELL, S. E. Y KEATING, D. P. (1983). Perception of numerical invariance in neonates. *Child Development*, 54, 695-701.

BASSEDAS, M., Y SELLARÈS, R. (1982). La construcción individual del sistema de numeración. *Infancia y Aprendizaje*, Vol. 19-20, 75-88.

BATLLE, L. Y BATLLE, L. (1988). *Investigo y aprendo. Desarrollo del pensamiento lógico en preescolar.* Madrid: CEPE.

BERMEJO, V. (1984). Conservaciones e invariantes cognitivos en el desarrollo. Aspectos psicológicos y epistemológicos. *Estudios de Psicología*, 17, 80-92.

BERMEJO, V. (1990). *El niño y la aritmética. Instrucción y construcción de las primeras nociones aritméticas.* Barcelona: Paidós.

BERMEJO, V., LAGO, M. O. (1991). *Aprendiendo a contar. Su relevancia en la comprensión y fundamentación de los primeros conceptos matemáticos.* Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

BERMEJO, V., LAGO, M. O. Y RODRIGUEZ, P. (1994). Desarrollo del pensamiento matemático. En Bermejo, V. (Ed). *Desarrollo cognitivo.* Madrid: Síntesis.

BEVER, T.G., MEHLER, J., Y EPSTEIN, J. (1968) What children do in spite of what the know. *Science*, 162. 921-924.

BOULTON-LEWIS, G. (1993). An Analysis of teh Relation between Sequence Counting and Knowledge of Place Value in the Early Years of School. *Mathematics Education Research*, Vol. 5, 2, 94-106.

BRISSIAUD, R. (1993). *El aprendizaje del cálculo. Más allá de Piaget y de la teoría de los conjuntos.* Madrid: Aprendizaje-Visor.

BRYANT, P. (1974). *Perception and Understanding in Young Children.* Londres: Methuen.

BRYANT, P. (1988). Empirical evidence for causes in development. En Butterworth, G. y Bryant, P. (Eds). *Causes of development.* Nueva York: Harvester.

CASTRO, E. RICO, L. CASTRO, E. (1989). *Números y operaciones. Fundamento para una aritmética escolar.* Madrid: Síntesis

CHI, M. T. H., Y KLHAR, D. (1975). Span and rate of apprehension in children and adults. *Journal of Experimental Child Psychology*, 19, 434-439.

DEAÑO, M. (1993). *Conocimientos lógico-matemáticos en la Escuela Infantil. Desarrollo, diseño y observación.* Madrid: CEPE.

DELVAL, J. (1986). *La Psicología en la escuela.* Madrid: Aprendizaje Visor.

DONALDSON, M. (1978). *La mente de los niños.* Madrid: Morata.

FUSON, K. (1988). *Children's Counting and Concepts of Number.* Nueva York: Springer-Verlag.

FUSON, K.; RICHARDS, J., Y BRIARDS, D. J. (1982)."The acquisition and elaboration of the number word sequence". En Brainerd, C. *Children's logical and Mathematical cognition.* Nueva York: Springer-Verlag.

GELMAN, R. Y GALLISTEL, C. R. (1978). *The child's understanding of number.* Cambridge: H.U. P:

HOHMANN, M., BANET, B., Y WEIKART, D. P. (1985). *Niños pequeños en acción. Manual para educadoras.* México: Trillas.

HUGHES, M. (1986). *Los niños y los números. Las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.* Barcelona: Nueva Paideia.

MARKMAN, E. (1979). *Classes, collections, and principles of pychological organization.* Comunicación presentada en Biennal Meeting of Society for Research in Child Development. San Francisco.

MARTÍNEZ MONTERO, J. (1991a). *El currículum en Educación Infantil. Desarrollo y actividades.* Madrid: Escuela Española.

MARTÍNEZ MONTERO, J. (1991b). *Numeración y operaciones básicas en la Educación Primaria.* Madrid: Escuela Española.

MAZA, C. (1989). *Conceptos y numeración en la Educación Infantil.* Madrid: Síntesis.

MCGARRIGLE, J. Y DONALDSON, M. (1975). Conservation accidents. *Cognition*, 3, 341-350.

MEHLER, J., Y DUPOUX, E. (1992). Nacer sabiendo. Madrid: Alianza Psicología Minor.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. (1990). *Estandares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática.* Traducción al castellano de S. A.E.M. Thales (1991). Sevilla.

PELTIER, M.L. (1995). Tendencias de la investigación en didáctica de las matemáticas y la enseñanza de los números en Francia. *Educación Matemática*, 7, 31-43.

PIAGET, J. Y SZEMINSKA, A. (1941, 1982). *Génesis del número en el niño.* Buenos Aires: Guadalupe.

PIAGET, J. (1953). "How children form mathematical concepts". *Scientific American*, 189, 74-79.

PIAGET, J. (1973). "Comments on mathematical education" En Howson, A. G. (Ed). *Developments in Mathematical Education: Proceedings if the Second International Congress on Mathematical Education.* Cambridge: Cambridge University Press.

SOPHIAN, C. (1995). Representation and Reasoning in Early Numerical Development: Counting, Conservation and Comparisons between Sets. *Child Development.* Vol 66., 2, 559-577.

STEFFE, L. P. VON GLASERSFELD, E. RICHARDS, J. Y COBB, P. (1983). *Children's counting types: Philosophy, theory, and application.* Nueva York: Praeger.

TOLLEFSRUD-ANDERSON, L. (1987). *Preschoolers'Use, Understanding, and Explanation of the Number Conservation Principle.* Paper presented at the Biennial Meeting of Society for Research in Child Development. Baltimore.

TOLLEFSRUD-ANDERSON, L., CAMPBELL, R. L., STARKEY, P., Y COOPER, R. G. (1994). Number conservation: Distinguishing quantifier from operator solutions. En Meljac, C. y Bideaud (Eds). *Pathways to Number.* Nueva York: Erlbaum.

TURNER, J. (1995). Math Education and Piaget's Theory: A Conversation with Constance Kamii. *Montessori-Life*, Vol 7, 2, 26-28.